

3

4가지 기본 부분공간

3.1 벡터공간과 부분공간

3.2 소거법을 이용한 영공간 계산 : $A = CR$

3.3 $Ax = b$ 의 완전해

3.4 독립, 기저, 차원

3.5 4가지 기본 부분공간의 차원

3장에 대한 고찰 : 소거의 큰 그림

3.1절은 대수학에 관한 질문으로 시작한다. ‘벡터공간(vector space)’은 어떻게 정의하는가? 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 경우 주요 연산은 $v + w$ 와 cv 이다. 이와 같은 합과 스칼라곱은 간단한 분배법칙 $c(v + w) = cv + cw$ 로 연결된다. 3.1절에서는 벡터 v 와 스칼라 c 가 만족해야 하는 8가지 조건을 살펴본다.

단, v 와 w 는 행렬일 수도 있다는 점에 주목하자. 행렬을 더할 수도 있고, 함수를 더할 수도 있다 (그리고 c 를 곱할 수도 있다). 이에 따라 행렬공간(matrix space)과 함수공간(function space)을 가질 수 있다. 그리고 $\mathbb{R}^n$ 에서는 $Ax = 0$ 을 만족하는 벡터들만 모아서 벡터공간을 만들 수 있는데, 이는 행렬 A 의 영공간(null space)을 생성한다. $Ax = 0$ 의 모든 해의 선형결합도 해가 되므로 영공간은 부분공간이다.

선형대수학은 $Ax = 0$ 을 푸는 방법을 제공한다. 가장 좋은 방법은 소거이다. 소거는 $Ax = 0$ 을 $Rx = 0$ 으로 단순화한다. 그런 다음 $A = CR$ 은 행렬 A 의 선형종속인 열을 행렬 C 의 처음 r 개의 선형독립인 열의 선형결합으로 표현하는 방법을 알려준다. 하나의 열은 다른 열들의 선형결합이다. 바로 여기에 $Ax = 0$ 에 대한 특별한 해결책이 있다.

마침내 기저(basis) 개념이 등장한다. 기저는 공간을 완벽하게 설명하는 벡터 집합이다. 기저벡터들의 선형결합은 공간의 모든 벡터를 생성하는 유일한 방법을 제공한다. 행렬 A 의 r 개의 선형독립인 열은 $C(A)$ 의 기저가 된다. $Ax = 0$ 의 $(n - r)$ 개의 특별한 해는 $N(A)$ 의 기저가 된다. 부분공간 C 와 N 의 ‘차원’은 각각 r 과 $(n - r)$ 이다.

2장에서는 가역인 정사각행렬에 대해 다뤘다. $PA = LU$ 에 있는 4개의 행렬은 모두 최대 랭크 $r = m = n$ 을 가졌다. 행렬 A 의 열공간과 행공간은 모두 전체 공간 $\mathbb{R}^n$ 이었다. A 와 A^T 의 영공간은 모두 영벡터만 포함했다.

3장에서는 더 높은 수준으로 이동한다. 3장은 이 책에서 가장 중요한 장이라 할 수 있다. 모든 $m \times n$ 행렬이 허용되며, $n > m$ 인 경우에는 $Ax = 0$ 에 대해 영벡터가 아닌 해가 존재한다. 영공간은 열공간, 행공간과 같지 않다는 점에 유의한다. 행렬 A 의 영공간은 열이나 행이 아닌 방정식 $Ax = 0$ 으로 시작한다.

이 장의 주요 목표는 ‘선형대수학의 기본정리(fundamental theorem of linear algebra)’이다. 3.5절에서는 다음과 같은 4가지 기본 부분공간과 이들의 차원 $r, r, n - r, m - r$ 을 연결한다.

A 의 열공간, A 의 행공간, A 의 영공간, A^T 의 영공간

이후에 함께 제공할 그림을 통해 선형대수학의 기본정리를 더 쉽게 기억할 수 있기를 바란다.

3.1 벡터공간과 부분공간

1. 모든 선형결합 $cv + dw$ 는 벡터공간 안에 있어야 한다.
2. 행렬 A 의 행공간은 A 의 행으로 '생성'된다. 행렬 A 의 열은 열공간 $C(A)$ 를 생성한다.
3. 행렬 $M_1, \dots, M_N$ 과 함수 $f_1, \dots, f_N$ 은 각각 행렬공간과 함수공간을 생성한다.

벡터공간 $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$ 부터 시작하자. 공간 $\mathbb{R}^n$ 에는 길이가 n 인 모든 열벡터 v 가 포함된다. 벡터의 성분 $v_1, \dots, v_n$ 은 모두 실수이다. $v_1 = 2 + 3i$ 와 같이 복소수가 허용되면 공간은 $\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \dots$ 가 된다. $\mathbb{R}^n$ 에서 벡터 v, w 를 더하는 방법은 이미 알고 있다. 또한 벡터에 수 c 또는 d 를 곱해서 cv 또는 dw 를 얻는 방법도 알고 있다. 따라서 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 에서 선형결합 $cv + dw$ 를 만들 수 있다.

모든 벡터공간에서 '선형결합'은 기본적인 연산이다. 이 연산은 8가지 조건을 만족해야 한다. 이 8가지 조건은 3.1절 연습문제의 시작 부분에서 소개한다. 참고로 첫 번째 조건은 $v + w = w + v$ 이다. 8가지 조건은 $\mathbb{R}^n$ 에서 성립함을 쉽게 확인할 수 있으나, 이 조건들을 외울 필요는 없다.

여기서 중요한 사항은 모든 선형결합 $cv + dw$ 가 벡터공간에 속해야 한다는 점이다. 예를 들어 모든 성분이 $v_i > 0$ 인 벡터 $(v_1, \dots, v_n)$ 의 집합은 벡터공간이 아니다. 또 $Ax = (1, 1, \dots, 1)$ 의 해집합은 벡터공간이 아니다. $\mathbb{R}^n$ 에서 직선은 원점 $(0, 0, \dots, 0)$ 을 통과하지 않으면 벡터공간이 아니다.

직선이 0 을 통과하면 직선 위의 점에 임의의 수 c 를 곱할 수 있다. 그리고 직선을 벗어나지 않고 직선 위에 점들을 더할 수 있다. $\mathbb{R}^n$ 에서 0 을 지나는 직선은 벡터공간 내부의 벡터공간이라는 부분공간의 개념을 보여준다.

벡터공간의 예

이 책에서는 주로 벡터공간과 함께 그 부분공간인 직선과 평면에 대해 다룬다. 영벡터 $0 = (0, 0, \dots, 0)$ 만 포함된 공간 Z 도 부분공간이다. 선형결합 $c0 + d0$ 은 0 이므로 여전히 부분공간 Z 의 내부에 있기 때문이다. Z 는 가장 작은 벡터공간이다. Z 를 종종 가역행렬의 영공간으로 본다. 만약 $Ax = 0$ 의 유일한 해가 영벡터 $x = 0$ 이라면, 행렬 A 의 열들은 선형독립이고, 행렬 A 의 영공간은 Z 이다.

행렬로 이루어진 벡터공간도 생각할 수 있다. 행렬공간 $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 은 모든 3×3 행렬로 구성된다. 여기서 행렬들의 선형결합 $cA + dB$ 를 취할 수 있다. 이 선형결합 연산은 벡터공간이 되기 위한 8가지 조건을 쉽게 만족한다. $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 의 한 부분공간은 9개의 성분 모두가 동일한 행렬의 집합이다(행렬의 직선). 모든 3×3 대칭행렬의 집합 S 도 부분공간이다. A, B 가 대칭행렬일 때, $cA + dB$ 도 대칭행렬이기 때문이다. 그러나 가역행렬로 이루어진 집합은 부분공간이 아니다. 왜 부분공간이 아닐까?

함수로 이루어진 벡터공간도 가능하다. (임의의 c 에 대해) 함수 $y = ce^x$ 들로 이루어진 집합인 '함수공간의 직선'은 벡터공간이 된다. 이 함수의 직선은 미분방정식 $\frac{dy}{dx} = y$ 의 모든 해를 포함한다. 또한 $y = a + bx + cx^2$ 과 같은 2차함수들로 이루어진 집합도 함수공간이 된다. 이 함수공간은 선형 미분방정식 $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ 의 해들을 모아놓은 집합이다. 그러면 행렬공간에서 함수공간으로 이동할 때, 선형 미분방정식 $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ 이 선형 대수방정식 $Ax = 0$ 을 대체함을 확인할 수 있다.

어떤 면에서 모든 3×3 행렬의 공간은 본질적으로 $\mathbb{R}^9$ 과 동일한 공간이다. 또한 함수 $f(x) = a + bx + cx^2$ 들로 이루어진 공간은 본질적으로 $\mathbb{R}^3$ 과 동일하다.

행렬과 함수의 선형결합은 해당 공간에서 잘 정의된다. 이 책에서는 함수공간보다 열벡터만으로 이루어진 벡터공간을 주로 다룰 것이다. 반복해서 강조하면, '공간'이라는 단어는 벡터나 행렬 또는 함수의 모든 선형결합이 공간 안에서 닫혀있음을 의미한다.

벡터공간의 부분공간

행렬과 함수를 벡터로 생각할 필요가 있다. 그러나 대부분 우리가 가정하는 벡터는 열벡터이다. 이들은 n 개의 성분을 가진 벡터이다(그러나 n 개의 성분을 가진 모든 벡터가 아닐 수도 있다). $\mathbb{R}^n$ 의 내부에는 중요한 벡터공간이 있고, 이들은 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간이다.

일반적인 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 부터 시작하자. 원점 $(0, 0, 0)$ 을 지나는 평면을 선택한다. 이 평면은 그 자체로 벡터공간이다. 이 평면 안에 있는 두 벡터의 합은 이 평면 안에 있다. 평면 안에 있는 벡터에 2 또는 -5 를 곱한 벡터 또한 평면 안에 있다. 3차원 공간의 원점을 지나는 평면은 $\mathbb{R}^2$ 처럼 보이더라도 $\mathbb{R}^2$ 과 다르다. 3차원 공간의 원점을 지나는 평면 안의 벡터에는 3가지 성분이 있으며 이 벡터는 $\mathbb{R}^3$ 에 속한다. 따라서 이 평면은 $\mathbb{R}^3$ 내부에 있는 벡터공간이다.

위 내용은 선형대수학의 아주 기본적인 아이디어 중 하나를 보여준다. 원점 $(0, 0, 0)$ 을 지나는 평면은 전체 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간이라는 것이다.

정의 부분공간 판정법

벡터공간의 **부분공간(subspace)**은 (0을 포함하며) 다음 2가지 조건을 만족하는 벡터들의 집합이다. v, w 가 부분공간의 벡터이고 c 가 임의의 스칼라일 때,

(i) $v + w$ 가 부분공간 안에 있다.

(ii) cv 가 부분공간 안에 있다.

즉 벡터들의 집합은 합 $v + w$ 와 스칼라곱 cv (그리고 dw)에 대해 ‘닫혀있다’. 이와 같은 연산은 부분공간에서 닫혀있다. 또한 뺄셈도 가능하다. 왜냐하면 $-w$ 가 부분공간 안에 있고 v 와 $-w$ 의 합이 뺄셈 $v - w$ 이기 때문이다. 부분공간 안에 있는 벡터들의 모든 선형결합은 부분공간 안에 있다.

앞서 살펴본 연산들은 부분공간이 속한 원래 벡터공간의 조건을 따르므로, 벡터공간이 되기 위해 필요한 8가지 조건이 자동으로 충족된다. 따라서 벡터공간의 부분집합이 부분공간이 되는지를 판정하기 위해서는 부분집합의 벡터 v, w 가 선형결합에 대해 닫혀있는지만 확인하면 된다.

알아두어야 할 사실 하나는 모든 부분공간이 영벡터를 포함한다는 것이다. 즉 $\mathbb{R}^3$ 의 평면이 부분공간이 되기 위해서는 원점 $(0, 0, 0)$ 을 지나야 한다. 이 사실을 강조하기 위해 별도로 언급했지만, 이 내용은 앞서 살펴본 부분공간 판정법의 조건 (ii)에서 유도된다. $c = 0$ 을 선택하면 $0v$ 가 부분공간 안에 있어야 한다.

원점을 포함하지 않는 평면의 경우 부분공간 판정법을 만족하지 못한다. 즉 이 평면들은 부분공간이 아니다. 원점을 지나는 직선도 부분공간이다. 직선 위에 있는 두 벡터를 더하거나 어떤 벡터에 5를 곱하면 그 벡터는 직선 위에 있다. 직선은 반드시 원점 $(0, 0, 0)$ 을 지나야 한다.

또 다른 부분공간은 전체 공간 $\mathbb{R}^3$ 이다. 전체 공간은 (자기 자신의) 부분공간이다. 다음은 $\mathbb{R}^3$ 의 가능한 모든 부분공간 목록이다.

L : $(0, 0, 0)$ 을 지나는 모든 직선

$\mathbb{R}^3$: 전체 공간

P : $(0, 0, 0)$ 을 지나는 모든 평면

Z : 단일 벡터 $(0, 0, 0)$

평면이나 직선의 일부만 가져온다면 부분공간 판정법에 대한 조건이 성립하지 않는다. $\mathbb{R}^2$ 에 대한 다음 예를 살펴보면 이들은 모두 부분공간이 아니다.

EX ① 성분이 양수 또는 0인 벡터 (x, y) 만 포함하는 집합이 있다(이는 제1사분면이다). 벡터 $(2, 3)$ 은 제1사분면에 포함되지만 $(-2, -3)$ 은 포함되지 않는다. 따라서 부분공간 판정법의 조건 (ii)에서 $c = -1$ 을 곱하면 조건에 위배된다. 그러므로 제1사분면은 $\mathbb{R}^2$ 의 부분공간이 아니다.

EX ② 성분이 양수 또는 0인 벡터와 모두 음수인 벡터 (x, y) 를 포함하는 집합이 있다(이는 제1사분면과 제3사분면이다). 이 경우 부분공간 판정법의 조건 (ii)가 충족된다. 즉 임의의 수 c 를 곱해도 닫혀있다. 그러나 조건 (i)이 충족되지 않는다. $v = (2, 3)$ 과 $w = (-3, -2)$ 의 합은 $(-1, 1)$ 이 되는데, 이는 제1사분면과 제3사분면의 점이 아니기 때문이다. 따라서 제1사분면과 제3사분면의 합집합은 $\mathbb{R}^2$ 의 부분공간이 아니다.

조건 (i)과 (ii)는 벡터합 $v + w$ 와 스칼라곱 cv 를 포함한다. 두 조건은 다음과 같이 하나의 조건으로 결합할 수 있다.

벡터 v, w 를 포함하는 부분공간은 반드시 모든 선형결합 $cv + dw$ 를 포함해야 한다.

EX ③ 모든 2×2 행렬의 집합 M 은 벡터공간이다. M 은 다음과 같은 두 부분공간을 갖는다.

$$U : \text{모든 상삼각행렬} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \quad D : \text{모든 대각행렬} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

U 안에 있는 상삼각행렬들의 합은 U 안에 있다. D 안에 있는 대각행렬들의 합도 D 안에 있다. D 는 M 의 부분공간이기도 하지만, U 의 부분공간이기도 하다. 물론 영행렬은 U, D, M 모두에 포함된다. Z 는 항상 하나의 벡터를 갖는 부분공간이다.

항등행렬의 상수배도 M 의 부분공간이다. 항등행렬의 상수배 cI 는 M 안에서 ‘행렬의 직선’을 형성한다. 이 또한 U 와 D 의 안에 있다.

항등행렬 I 자체가 부분공간이 될까? 물론 아니다. M 안에서 하나의 원소로 구성된 부분공간은 영행렬뿐이다. M 안에서 더 많은 부분공간을 만들 수 있다. 3.1절 [연습문제 5]에서 이와 관련한 내용을 다룬다.

A의 열공간

가장 중요한 부분공간은 행렬 A 에 관한 것이다. 우리는 $Ax = b$ 를 풀고자 한다. 이 방정식의 해가 존재하기 위해서는 우변 벡터 b 를 행렬 A 와 벡터 x 의 곱으로 나타낼 수 있어야 한다. A 와 x 의 곱으로 나타낼 수 있는 벡터 b 는 행렬 A 의 ‘열공간’을 형성한다.

Ax 는 행렬 A 의 열들의 선형결합이라는 점을 기억하자. 가능한 모든 벡터 b 를 얻기 위해 가능한 모든 x 를 사용한다. 그리고 행렬 A 의 열들의 모든 선형결합을 취한다. 그러면 이 선형결합은 행렬 A 의 열공간을 생성한다. 이는 열벡터로 구성된 벡터공간이다.

정의 열공간

열공간은 모든 열의 선형결합으로 구성된다. 이러한 선형결합은 가능한 모든 벡터 Ax 이다. 벡터 Ax 들이 열공간 $C(A)$ 를 채운다.

열공간은 이 책 전체에 매우 중요한 주제이다. $Ax = b$ 를 해결하는 것은 벡터 b 를 행렬 A 의 열들의 선형결합으로 표현하는 것과 같다. 우변 벡터 b 는 행렬 A 의 열공간 안에 있어야 하며, 그렇지 않으면 $Ax = b$ 의 해는 존재하지 않는다.

방정식 $Ax = b$ 의 해가 존재할 필요충분조건은

벡터 b 가 행렬 A 의 열공간 안에 있는 것이다.

벡터 b 가 열공간 $C(A)$ 안에 있을 때, b 는 행렬 A 의 열들의 선형결합이다. 이때 선형결합의 계수는 방정식 $Ax = b$ 의 해가 된다. ‘공간’이라는 단어는 모든 열의 선형결합을 취함으로써 정당화된다. $C(A)$ 에는 $\mathbb{R}^m$ 안에 있는 영벡터가 포함된다.

주의할 점은 행렬 A 의 열만 모으면 이는 부분공간을 형성하지 않는다는 것이다. 가역행렬은 부분공간을 형성하지 않는다. 특이행렬도 부분공간을 형성하지 않는다. 모든 선형결합을 포함해야 한다. 열들의 선형결합을 취할 때, 행렬 A 의 열들은 부분공간을 ‘생성’한다.

A의 행공간

행렬 A 의 행은 전치행렬 A^T 의 열이다. A 가 $m \times n$ 행렬이면 A^T 는 $n \times m$ 행렬이다. 가급적 열벡터를 다루는 것을 선호하므로 A^T 를 이용한다.

A 의 행공간은 전치행렬 A^T 의 열공간 $C(A^T)$ 이다.

A 의 행공간은 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간이다. 여기에는 A^T 의 m 개의 열벡터와 이들의 모든 선형결합이 포함된다. 벡터 c 가 부분공간 $C(A^T)$, 즉 A 의 행공간 안에 있을 때, 방정식 $A^T y = c$ 의 해가 존재한다.

1장에서는 왜 $C(A)$ 와 $C(A^T)$ 가 모두 r 개의 선형독립인 벡터를 갖는지 설명했다. 이 경우 $r = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ 이다. 이에 대한 새로운 증명은 3.5절에서 확인하자.

EX 4 랭크 1 행렬 $A = uv^T$ 의 행공간은 모든 열벡터 cv 의 직선이다. 왜냐하면 $A^T = vu^T$ 의 모든 열이 벡터 v 의 상수배이기 때문이다. 하나의 벡터 v 는 행렬 A 의 행공간을 생성하며, 하나의 벡터 u 는 행렬 A 의 열공간을 생성한다. 이 공간들은 원점 0 을 통과하는 직선이다.

A 의 열은 벡터공간 $C(A)$ 를 생성한다

앞으로 ‘생성’이라는 용어가 유용하게 사용될 것이다. $\mathbb{R}^m$ 의 부분집합 S 로 시작하자. S 가 N 개의 벡터만 포함한다면, S 는 확실히 부분공간이 아니다. 그러나 S 의 모든 벡터의 선형결합을 포함한다면 벡터공간 V 가 만들어진다. 이 경우 집합 S 는 벡터공간 V 를 생성한다. 사실 V 는 S 를 포함하는 가장 작은 벡터공간이다(벡터공간을 생성하려면 모든 선형결합을 포함해야 하기 때문이다).

이것이 바로 우리가 행렬 A 의 열에 대해 한 일이다. 행렬 A 의 n 개의 열은 A 의 열공간 $C(A)$ 를 생성하며, $C(A)$ 는 모든 열들의 선형결합을 포함한다. 선형독립성과 생성은 무관한다. 동일한 방식으로 행렬 A^T 의 m 개의 열은 A 의 행공간 $C(A^T)$ 를 생성한다.

Q. 2×2 가역행렬이 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, 즉 모든 2×2 행렬의 집합을 생성함을 증명하라.

EX 5

- $n \times n$ 행렬 A 가 가역행렬일 때, 행렬 A 의 열은 $\mathbb{R}^n$ 을 생성한다.
- 3×3 가역행렬은 전체 행렬공간 $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 을 생성한다.
- 3×3 특이행렬(비가역)은 $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ 을 생성한다.

다음으로 살펴볼 것은 영공간 $N(A)$ 이며, 이를 위해서는 새로운 아이디어가 필요하다. $Ax = 0$ (방정식은 m 개이고, 벡터는 n 개가 아님)으로 시작하자. 이 방정식의 해 x 는 행렬 A 의 영공간을 만들고, 영공간은 벡터공간이 된다. 왜냐하면 $Ax = 0$, $Ay = 0$ 이면 $A(cx + dy) = 0$ 이기 때문이다. 우리는 이와 같은 해 x, y 를 찾기 위해 노력해야 한다.

Q. 언제 10개의 벡터가 $\mathbb{R}^5$ 을 생성하는가? 이는 가능하다. 그러나 아무렇게나 고른 10개의 벡터로는 $\mathbb{R}^5$ 을 생성할 수 없다.

3.1 연습문제

※ [문제 1~7]은 일반적인 벡터공간에 관한 문제이다. 각 벡터공간의 벡터가 반드시 열벡터인 것은 아니다. 벡터공간의 정의에서 합 $x+y$ 와 스칼라곱 cx 는 다음 8가지 조건을 만족해야 한다. 조건 (1)~(4)는 $x+y$ 에 관한 내용이고, 조건 (5)~(6)은 cx 에 관한 내용이며, 조건 (7)~(8)은 $x+y$ 와 cx 를 연결한다.

- (1) $x+y=y+x$
- (2) $x+(y+z)=(x+y)+z$
- (3) 모든 벡터 x 에 대해 $x+0=x$ 를 만족하는 벡터는 '영벡터 0 '이 유일하다(합에 대한 항등원 0 이 유일하게 존재).
- (4) 모든 벡터 x 에 대해 $x+(-x)=0$ 을 만족하는 벡터는 $-x$ 가 유일하다(합에 대한 역원이 유일하게 존재)
- (5) $1 \cdot x = x$
- (6) $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$
- (7) $c(x+y) = cx + cy$
- (8) $(c_1+c_2)x = c_1x + c_2x$

1. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$ 를 $(x_1 + y_2, x_2 + y_1)$ 으로 정의한다. $\mathbb{R}^2$ 에서의 일반적인 스칼라곱 $cx = (cx_1, cx_2)$ 를 가정할 때, 8가지 조건 중 어느 것을 만족하지 않는가?
2. 스칼라곱 cx 를 (cx_1, cx_2) 대신 $(cx_1, 0)$ 으로 정의한다. $\mathbb{R}^2$ 에서의 일반적인 합을 가정할 때, 8가지 조건을 만족하는가?

3. 다음 물음에 답하라.

- (a) $\mathbb{R}^1$ 에서 양수 $x > 0$ 만 유지하면 8가지 조건 중 어떤 조건에 위배되는가? 단, c 는 모든 실수가 허용되어야 한다. 이 반직선은 부분공간이 아니다.
- (b) 양수에 대해 합 $x+y$ 는 xy , 스칼라곱 cx 는 x^c 으로 정의하면 8가지 조건을 모두 만족한다. $c=3$, $x=2$, $y=1$ 일 때 조건 (7)을 판정하라(그러면 합은 $x+y=2$, 스칼라곱은 $cx=8$ 이 된다). 이 벡터공간에서 어떤 수가 합에 대한 항등원인 '영벡터'의 역할을 하는가?

4. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 는 모든 2×2 행렬의 벡터공간 $\mathbf{M}$ 의 '벡터'이다. 이 벡터공간의 영벡터, $\frac{1}{2}A$, $-A$ 를 작성하라. A 를 포함하는 가장 작은 부분공간(A 에 의해 생성되는 부분공간)에는 어떤 행렬들이 포함되는가?

5. 다음 물음에 답하라.

- (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 을 포함하지만 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 은 포함하지 않는 2×2 행렬의 벡터공간 $\mathbf{M}$ 의 부분공간에 대해 설명하라.
- (b) $\mathbf{M}$ 의 부분공간이 행렬 A , B 를 모두 포함할 때, 이 부분공간은 항등행렬을 포함해야 하는가?
- (c) 0이 아닌 성분을 갖는 대각행렬을 포함하지 않는 $\mathbf{M}$ 의 부분공간에 대해 설명하라.

6. 함수 $f(x) = x^2$ 과 $g(x) = 5x$ 는 $\mathbf{F}$ 에서 '벡터'이다. $\mathbf{F}$ 는 모든 실함수의 벡터공간이다(단, 함수는 $-\infty < x < \infty$ 에 대해 정의된다). 선형결합 $3f(x) - 4g(x)$ 는 함수 $h(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 이다.

7. $f(x)$ 에 c 를 곱한 것이 $f(cx)$ 이면 벡터공간의 어떤 조건을 만족하지 못하는가? 단, 합 연산은 일반적인 $f(x) + g(x)$ 를 따른다.

※ [문제 8~15]는 '부분공간이 되기 위한 조건'에 관한 문제이다. 부분공간에서 $x+y$, cx (그리고 모든 선형결합 $cx+dy$)에 대해 닫혀있어야 한다.

8. 부분공간에 관한 하나의 조건은 만족할 수 있지만, 다른 하나는 만족하지 않을 수 있다. 다음 예에 대해 이를 확인하라.

- (a) $\mathbb{R}^2$ 의 부분집합으로, $x+y$ 에 대해서는 닫혀있고, $\frac{1}{2}x$ 에 대해서는 닫혀있지 않은 집합
- (b) $\mathbb{R}^2$ 의 부분집합으로(제1사분면과 제3사분면으로 이루어진 것 제외), cx 에 대해서는 닫혀있고, $x+y$ 에 대해서는 닫혀있지 않은 집합

9. 다음 중 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간은 무엇인가?
- (a) $b_1 = b_2$ 를 만족하는 벡터 (b_1, b_2, b_3) 로 이루어진 평면
 - (b) $b_1 = 1$ 을 만족하는 벡터 (b_1, b_2, b_3) 로 이루어진 평면
 - (c) $b_1 b_2 b_3 = 0$ 을 만족하는 벡터 (b_1, b_2, b_3) 로 이루어진 집합
 - (d) $v = (1, 4, 0)$ 과 $w = (2, 2, 2)$ 의 모든 선형결합으로 이루어진 집합
 - (e) $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ 을 만족하는 모든 벡터의 집합
 - (f) $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ 를 만족하는 모든 벡터의 집합
10. 2×2 행렬공간 $\mathbf{M}$ 에서 다음을 포함하는 가장 작은 부분공간에 대해 설명하라.
- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 - (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 - (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
11. P 는 방정식 $x + y - 2z = 4$ 가 나타내는 $\mathbb{R}^3$ 안의 평면이다. 원점 $(0, 0, 0)$ 은 P 안에 없다. P 안의 어떤 두 벡터를 찾아서 그 두 벡터의 합이 P 안에 없음을 확인하라.
12. P_0 는 [문제 11]의 P 와 평행한 평면이고 원점 $(0, 0, 0)$ 을 지난다. P_0 의 방정식을 구하라. 그리고 P_0 안의 어떤 두 벡터를 찾아서 그 두 벡터의 합이 P_0 안에 있음을 확인하라.
13. P 는 원점 $(0, 0, 0)$ 을 지나는 평면이고, L 은 원점 $(0, 0, 0)$ 을 지나는 직선이다. P 와 L 을 모두 포함하는 가장 작은 벡터공간은 _____ 또는 _____이다.
14. 다음 물음에 답하라.
- (a) 2×2 행렬공간 $\mathbf{M}$ 에서 가역행렬의 집합은 부분공간이 아님을 보여라.
 - (b) 2×2 행렬공간 $\mathbf{M}$ 에서 특이행렬의 집합은 부분공간이 아님을 보여라.
15. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라(예를 통해 각 경우의 합을 확인하라).
- (a) $\mathbf{M}$ 에서 대칭행렬($A^T = A$ 를 만족)은 부분공간을 형성한다.
 - (b) $\mathbf{M}$ 에서 반대칭행렬($A^T = -A$ 를 만족)은 부분공간을 형성한다.
 - (c) $\mathbf{M}$ 에서 비대칭행렬($A^T \neq A$ 를 만족)은 부분공간을 생성한다.

※ [문제 16~26]은 열공간 $C(A)$ 와 방정식 $Ax = b$ 에 관한 문제이다.

16. 다음 행렬의 열공간(선 또는 평면)에 대해 각각 설명하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. 우변의 b_1, b_2, b_3 가 무엇일 때, 다음 방정식의 해가 존재하는가?

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

18. 행렬 A 의 1행을 2행에 더하면 행렬 B 를 얻는다. 행렬 A 의 1열을 2열에 더하면 행렬 C 를 얻는다. B 또는 C 중에서 열들의 선형결합이 행렬 A 의 열들의 선형결합과 같은 것은 무엇인가? 열들의 선형결합이 같은 두 행렬은 같은 열 ___을 갖는다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

19. 우변 (b_1, b_2, b_3) 가 무엇일 때, 다음 방정식의 해가 존재하는가? 이 경우 벡터 $\mathbf{b}$ 는 $C(A)$ 안에 있다.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

20. (꼭 풀어볼 만한 문제) 행렬 A 에 열 $\mathbf{b}$ 를 추가하면 어떤 경우를 제외하고 열공간이 커지는가? 열공간이 커지는 예와 그렇지 않은 예를 제시하라. 열공간이 커지지 않는 경우, 왜 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 를 풀 수 있는가? $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 를 풀 수 있으면 A 와 $[A \ \mathbf{b}]$ 의 열공간은 동일하다.

21. AB 의 열은 A 의 열들의 선형결합이다. 따라서 AB 의 열공간은 A 의 열공간에 포함된다(아마 일치할 수도 있다). A 의 열공간이 AB 의 열공간과 같지 않은 예를 제시하라.

22. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 와 $A\mathbf{y} = \mathbf{b}^*$ 의 해가 모두 존재한다고 가정하자. 그러면 $A\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{b}^*$ 의 해도 존재한다. $\mathbf{z}$ 는 무엇인가? $\mathbf{b}$ 와 $\mathbf{b}^*$ 가 열공간 $C(A)$ 안에 있다면, $\mathbf{b} + \mathbf{b}^*$ 도 $C(A)$ 안에 있다. 이는 벡터공간이 되기 위한 조건이다.

23. 만약 A 가 5×5 가역행렬이면, A 의 열공간은 무엇인가? 그렇게 생각한 이유는 무엇인가?

24. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라(거짓인 경우 반례를 찾으라).

- (a) $C(A)$ 안에 속하지 않는 벡터 $\mathbf{b}$ 의 집합은 부분공간이다.
- (b) $C(A)$ 가 영벡터 하나만 포함한다면, A 는 영행렬이다.
- (c) $2A$ 의 열공간은 A 의 열공간과 동일하다.
- (d) $A - I$ 의 열공간은 A 의 열공간과 동일하다.

25. 열공간이 $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ 을 포함하고 $(1, 1, 1)$ 을 포함하지 않는 3×3 행렬을 구하라. 그리고 행렬의 열공간이 하나의 직선이 되도록 하는 3×3 행렬을 구하라.

26. 모든 벡터 b 에 대해 $Ax = b$ 의 해가 존재하고, A 가 9×12 행렬일 때 $C(A)$ 를 구하라.

도전문제

27. S 와 T 가 벡터공간 V 의 두 부분공간이라 가정하자. 다음 물음에 답하라.

(a) 합 $S + T$ 는 $s \in S$, $t \in T$ 일 때 모든 합 $s + t$ 를 모아놓은 집합으로 정의한다. $S + T$ 가 벡터공간이 되기 위한 조건을 만족함을 보여라. $S + T$ 는 합과 스칼라곱에 대해 닫혀있다.

(b) S 와 T 가 $\mathbb{R}^m$ 안에 있는 직선일 때, $S + T$ 와 합집합 $S \cup T$ 의 차이는 무엇인가? $S \cup T$ 가 $S + T$ 를 생성함을 보여라.

28. S 가 행렬 A 의 열공간 $C(A)$ 이고, T 가 행렬 B 의 열공간 $C(B)$ 일 때, $S + T$ 는 어떤 행렬 M 의 열공간인가? A , B , M 의 열은 모두 $\mathbb{R}^m$ 안에 있다. 그러나 $A + B$ 가 항상 M 이 되는 것은 아니다. M 의 열들이 $S + T$ 를 생성한다.

29. 행렬 A 와 $[A \ A B]$ 가 동일한 열공간을 가짐을 보여라. $C(A^2)$ 이 $C(A)$ 보다 작아지는 정사각행렬 A 를 구하라. 행렬 A 가 어떤 특징을 갖는 $n \times n$ 행렬일 때, $C(A) = \mathbb{R}^n$ 이 성립하는가?

30. 2계 미분방정식 $\frac{d^2y}{dx^2} = y$ 에 대한 또 다른 선형독립인 해($y = e^x$ 제외)를 구하라. 또 $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$ 에 대한 2개의 선형독립인 해를 구하라. 그러면 2차원 해공간은 어떤 함수 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 의 선형결합으로 나타낼 수 있다.

31. V 와 W 는 $\mathbb{R}^n$ 의 두 부분공간이다. 이들의 '교집합' $V \cap W$ 는 두 부분공간 V , W 모두에 있는 벡터들을 포함한다(V , W 모두에 영벡터가 포함된다는 점에 유의한다). 다음 질문을 이용해 $V \cap W$ 가 부분공간임을 보여라.

“ x 와 y 가 $V \cap W$ 에 포함되는 경우, $cx + dy$ 가 $V \cap W$ 에 포함되는가?”

3.2 소거법을 이용한 영공간 계산 : $A = CR$

1. $\mathbb{R}^n$ 안에 있는 영공간 $N(A)$ 는 $Ax=0$ 의 모든 해로 구성된다. 영공간에는 $x=0$ 이 포함된다.
2. A 에서 R_0 , R_0 에서 R 로의 소거는 영공간을 바꾸지 않는다($N(A) = N(R_0) = N(R)$).
3. 기약행 사다리꼴 $R_0 = \text{rref}(A)$ 는 r 개의 열에서 I 를, $(n-r)$ 개의 열에서 F 를 갖는다.
4. j 열이 이전 열들과 선형종속이면, $Ax=0$ 은 $x_j=1$ 인 특별해(special solution)를 갖는다.
5. $Ax=0$ 에 대한 $(n-r)$ 개의 특별해는 $-F$ 와 I 를 포함한다.
6. $m < n$ 인 가로가 길고 세로가 짧은 모든 행렬은 $Ax=0$ 의 영벡터가 아닌 해를 영공간에서 갖는다.

이 절에서는 $Ax=0$ 의 모든 해를 찾는다. 정사각행렬 A 가 가역행렬(랭크는 $r=n$)일 때, 유일한 해는 $x=0$ 이다. 그러면 행렬 A 의 영공간은 영벡터만 포함한다. 즉 행렬 A 의 열들은 선형독립이다. 그러나 일반적으로 행렬 A 는 r 개의 선형독립인 열을 갖는다($r=(\text{랭크})$). 행렬 A 의 $(n-r)$ 개의 서로 다른 열은 선형독립인 열들의 선형결합이다. 이제 행렬 A 의 영공간에서 $(n-r)$ 개의 벡터를 찾고자 한다. 이는 $Ax=0$ 의 특별해이다.

A 가 가역인 정사각행렬인 경우, 2장에 따르면 A 는 상삼각행렬 U 로 단순화된다. 모든 형태의 행렬에 대해 소거법은 $Ax=0$ 을 '사다리꼴' $Rx=0$ 으로 단순화한다(실제로 A 가 가역행렬일 때는 $R=I$ 가 되어, 소거법은 L 과 U 보다 더 진행되어 단순화될 수 있다). R 의 2가지 예를 통해 확인해보자.

다음 [EX 1]의 R 은 랭크가 $r=2$ 인 행렬이다. $n=4$ 개의 열이 있으므로 $Rx=0$ 에 대해 $(n-r)=4-2=2$ 개의 선형독립인 해를 찾으면 된다. 영공간 $N(R)$ 의 차원은 2이다.

EX 1 다음 연립방정식 $Rx=0$ 의 해를 생각해보자.

$$R = [I \ F]P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad Rx=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

두 '특별해'는 쉽게 찾을 수 있다($x_3=1, x_4=0$ 또는 $x_3=0, x_4=1$).

- $x_3 = 1, x_4 = 0$ 이면 첫 번째 방정식에 따라 $x_1 = -3$ 이고, 두 번째 방정식에 따라 $x_2 = -4$ 이다.
- $x_3 = 0, x_4 = 1$ 이면 첫 번째 방정식에 따라 $x_1 = -5$ 이고, 두 번째 방정식에 따라 $x_2 = -6$ 이다.

두 특별해 $s_1 = (-3, -4, 1, 0), s_2 = (-5, -6, 0, 1)$ 은 R 의 영공간에 포함된다. 즉 $Rs_1 = 0, Rs_2 = 0$ 이다. 두 해의 임의의 선형결합도 영공간에 포함된다. 행렬 R 과 벡터 $x = c_1s_1 + c_2s_2$ 의 곱은 영벡터이다. 이러한 특별해 s_1, s_2 가 영공간의 기저가 된다.

[EX 1]의 행렬 R 은 다루기 쉬웠다. 처음 두 열에는 항등행렬이 있다($P = I$). R 은 ‘기약행 사다리꼴’의 예이다. 기약행 사다리꼴의 예를 하나 더 살펴보자. 참고로 R_0 의 아래첨자 0은 영행이 포함됨을 의미한다.

EX 2 다음 연립방정식 $R_0x = 0$ 의 해를 생각해보자.

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_0x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_3 + 9x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

이제 항등행렬 형태는 1열과 3열에 있으며 3행은 영행이다. R_0 는 여전히 기약행 사다리꼴이며, 이보다 더 간단하게 만들 수는 없다. 항등행렬 형태에 있는 성분 1은 여전히 각 행의 0이 아닌 첫 번째 성분이다. ‘사다리꼴’이라는 용어는 1의 ‘계단’을 의미한다. 모든 영행은 항상 R_0 의 마지막 행에 위치한다.

특별해는 여전히 **자유변수**(free variables) x_2, x_4 에 대해 1, 0의 값을 갖는다.

- $x_2 = 1, x_4 = 0$ 이면 첫 번째 방정식에 따라 $x_1 = -7$ 이고, 두 번째 방정식에 따라 $x_3 = 0$ 이다.
- $x_2 = 0, x_4 = 1$ 이면 첫 번째 방정식에 따라 $x_1 = -8$ 이고, 두 번째 방정식에 따라 $x_3 = -9$ 이다.

특별해는 $s_1 = (-7, 1, 0, 0), s_2 = (-8, 0, -9, 1)$ 이다. 자유변수 x_2, x_4 의 경우, 자유롭게 1, 0을 선택하고 다음으로 0, 1을 선택한 것이다. $R_0x = 0$ 을 이용하면 x_1, x_3 를 구할 수 있다. 1열과 2열에서 항등행렬 형태 I 를 유지하고 싶다면 치환행렬 P 가 필요하다.

이 절의 계획은 다음과 같다. 임의의 $m \times n$ 행렬 A 로 시작하여 소거법을 적용한다. 이에 따라 행렬 A 를 기약행 사다리꼴 $R_0 = \text{rref}(A)$ 로 바꾼다. 앞의 [EX 1]과 [EX 2]에서는 $R_0 = R$ 인 가장 간단한 형태와 R_0 가 영행을 갖는 일반적인 형태를 제시했다. R_0 의 모든 영행을 제거하면 R 이 된다.

$$\begin{array}{lll} \text{가장 간단한 경우}(r, m, n = 2, 2, 4) & R = [I \ F] & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\ \\ \text{일반적인 경우}(r, m, n = 2, 3, 4) & R_0 = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P & \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

I 와 F 에는 r 개의 행이 있다. 소거 후의 행렬 R_0 와 원래 행렬 A 에는 m 개의 행이 있다. 따라서 R_0 에는 $(m-r)$ 개의 영행이 있다. 이 영행들을 제거하면 $R = [I \ F]P$ 가 된다.

요약

2장에서 살펴본 행렬 A 는 가역인 정사각행렬이었다. $Ax = b$ 에 소거법을 적용하면 $Ux = c$ 로 바뀌었다(U 는 상삼각행렬). 그다음 역대입법으로 x 를 구했다.

여기서는 랭크가 r 인 일반적인 행렬을 가정한다. 소거법은 1장에서와 같이 $r \times r$ 항등행렬에 도달할 때까지 진행한다(행렬 A 의 처음 r 개의 선형독립인 열로 C 를 생성했다). 이제 A 를 C 와 R 로 분해한다.

새로운 각 열에 대한 질문을 하나 생각해보자. “새로운 열은 이전 열들과 선형종속인가?” 이 절에서는 $Ax = 0$ 을 $Rx = 0$ 으로 바꾸고 영공간을 찾는다. 그리고 3.3절에서는 $Ax = b$ 를 $Rx = d$ 로 바꾸고 모든 해를 찾는다. 앞서 살펴본 예는 행렬 A 에 대한 모든 소거를 마친 후의 행렬 R 을 보여줬다. R 을 유도하는 단계들은 곧 살펴볼 것이다.

[부록 A9]에서는 기약행 사다리꼴 $\text{rref}(A)$ 를 ‘ $A = CR$ 을 찾고 $Ax = 0$ 을 푸는 핵심 단계’로 요약한다.

A 에서 $\text{rref}(A)$ 로의 소거 : 기약행 사다리꼴

소거는 어떻게 작동할까? 어떤 순서로든 다음 3가지 단계로 실행할 수 있다.

- ❶ 한 행에서 다른 행(위 또는 아래)의 상수배를 뺀다.
- ❷ 행에 0이 아닌 수를 곱한다.
- ❸ 행을 서로 교환한다.

[EX 1]과 [EX 2]에서 소개한 가장 간단한 R 의 경우와 일반적인 R_0 의 경우로 계속 진행하자. 다음은 2×4 행렬 A 가 소거를 통해 [EX 1]의 2×4 행렬 $R = [I \ F]$ 로 바뀌는 과정을 보여준다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 17 \\ 3 & 7 & 37 & 57 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 17 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} = R$$

소거는 1열로 시작한다. 먼저 2행에서 1행에 3을 곱한 것을 뺀다. 이 결과에 따라 중간 행렬에서 0이 생성된다. 이제 1열이 결정되었다(원하는 대로 모서리 피벗이 $A_{11} = 1$ 이 되었다). 이제 2열로 이동하여, 1행에서 새로운 2행에 2를 곱한 것을 뺀다. 위쪽으로 소거하면 R 에 두 번째 0이 생성된다. 이제 R 은 $r \times r$ 항등행렬로 시작한다. 여기서 랭크는 $r = 2$ 이고 행렬 A 에 대한 소거는 완료되었다.

소거를 통해 1열과 2열에 있는 행렬 $W = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ 이 항등행렬로 바뀌었다. 즉 행렬 A 는 W 로 시작하는데, 행렬 R 은 I 로 시작한다.

$W^{-1}A = W^{-1}[W \ H]$ 를 계산하면, $R = [I \ W^{-1}H] = [I \ F]$ 와 같이 바뀐다.

이미 A 의 선형종속인 열(H 부분)이 선형독립인 열(W 부분)들의 선형결합이 될 것임을 알고 있다. 이제 $H = WF$ 임을 보이자. 행렬 F 는 행렬 A 의 선형독립인 열들을 어떻게 선형결합하여 선형종속인 열을 생성할 수 있는지 알려준다. 이로써 기약행 사다리꼴 R 과 F 의 역할을 이해할 수 있다.

$$\text{선형종속인 열} \quad H = \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ 37 & 57 \end{bmatrix} = WF = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

A 로부터 R 을 유도할 때 항상 동일한 R 을 얻는다. 즉 R 은 (서로 다른 소거 단계를 거치더라도) 행렬 A 에 의해 완전히 결정된다.

- ❶ 행렬 A 의 처음 r 개의 선형독립인 열은 R 에서 I 를 포함하는 열의 위치를 알려준다. 치환 행렬 P 는 선형독립인 해당 열을 행렬 A 의 올바른 위치로 이동시킨다.
- ❷ R 의 나머지 부분인 F 에 있는 열은 다음과 같은 방정식 $H = WF$ 에 의해 결정된다.

$$(A \text{의 선형독립인 열}) = (A \text{의 선형종속인 열}) \times F$$

- ❸ R_0 의 후반부에 있는 $(m - r)$ 개의 행은 영행이다.

EX 2 앞서 살펴본 [EX 2]를 이어서 살펴본다. 기약행 사다리꼴 R_0 를 유도하는 행렬 A 를 보자. A 와 R_0 는 모두 랭크가 $r=2$ 인 3×4 행렬이다. 소거 과정은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 35 \\ 2 & 14 & 6 & 70 \\ 2 & 14 & 9 & 97 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 27 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 27 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_0$$

열을 순서대로 소거 : A 에서 R_0 로의 단계

앞서 다양한 예를 살펴봤으니, 이제 알고리즘에 대해 설명하고자 한다. 소거는 왼쪽 열에서 오른쪽 열로 진행한다. k 개의 열이 지나면 행렬의 해당 부분은 rref 형태가 되고, $(k+1)$ 번째 열에 대한 준비가 완료된다. 이 새로운 열은 다음과 같이 위쪽 부분 u 이고 아래쪽 부분이 ℓ 이다.

$$\text{처음 } (k+1)\text{번째 열} \quad \begin{bmatrix} I_k & F_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_k \text{ 다음에 오는 열} \quad \begin{bmatrix} u \\ \ell \end{bmatrix}$$

여기서 다음 질문을 생각해봅시다. “이 새로운 $(k+1)$ 번째 열은 I_k 와 F_k 중 무엇과 연결되는가?”

만약 ℓ 이 전부 0이라면, 새로운 열은 처음 k 개의 열과 선형종속이다. 그러면 u 는 F_k 와 연결되어 F_{k+1} 을 만들고, $(k+2)$ 번째 열에 대한 이후의 단계를 진행한다.

만약 ℓ 의 성분 중 0이 아닌 성분이 하나라도 있다면, 새로운 열은 처음 k 개의 열과 선형독립이다. ℓ 에서 임의의 0이 아닌 성분(가장 큰 수가 바람직함)을 피벗으로 선택한다. 행렬 A 의 해당 행을 $(k+1)$ 번째 행으로 이동시킨다. 그런 다음 (소거법을 통해) 해당 피벗 행의 상수배를 빼서 $(k+1)$ 번째 열의 나머지 성분을 모두 0으로 만든다. 그러면 $(k+1)$ 번째 열은 I_k 와 연결되어 I_{k+1} 을 생성한다. 이제 $(k+2)$ 번째 열에 대한 이후의 단계를 진행한다.

소거가 끝나면 가장 바람직한 열 번호 목록을 얻는다. 이 목록은 행렬 A 의 처음 r 개의 선형독립인 열을 알려준다. 이 열들이 행렬 C 의 열이다. 이들은 $A = CR$ 의 행 인자(factor) R 에서 항등 행렬 $I_{r \times r}$ 로 변형된다.

[EX 2]에서는 A 에서 R_0 로 소거할 때의 3가지 행 연산을 다음과 같이 보여줬다.

- ❶ 한 행에서 다른 행(아래 또는 위)의 상수배를 뺀다.
- ❷ $[0 \ 0 \ 3 \ 27]$ 과 같은 행을 이 행의 0이 아닌 첫 번째 성분으로 나눈다((피벗)=1에 도달하기 위함).
- ❸ 행을 서로 교환한다(모든 영행은 R_0 의 가장 아래로 이동하기 위함).

다른 일련의 단계를 거치더라도 동일한 R_0 에 도달할 수 있다. 그러나 그 결과 $R_0 = \text{rref}(A)$ 가 변할 수는 없다. R_0 는 모두 원래 행렬 A 에 의해 완전히 결정되기 때문이다.

- [EX 2]에서 R_0 는 영행을 갖는다. 왜냐하면 행렬 A 의 랭크가 $r=2$ 이기 때문이다.
- 항등행렬 I 는 R_0 의 1열과 3열에 속한다. 왜냐하면 해당 부분의 열들이 행렬 A 의 처음 선형독립인 열이기 때문이다.
- R 의 2열과 4열에 있는 F 는 행렬 A 의 1열과 3열의 선형결합으로 선형종속인 2열과 4열을 제공한다.

$$CF = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 35 \\ 14 & 70 \\ 14 & 97 \end{bmatrix} = (A \text{의 선형종속인 2열과 4열})$$

1장에서는 $(35, 70, 97)$ 이 A 의 1열과 3열의 선형결합이 됨을 확인할 수 없었다.

행렬 R 이 행렬 A 의 영공간을 어떻게 보여주는지 기억하자. $Ax = 0$ 을 풀려면 $Rx = 0$ 을 풀어야 한다. R 의 내부에 항등행렬이 있으므로 방정식 $Rx = 0$ 은 쉽게 풀 수 있다.

행렬 분해 $A = CR$ 과 영공간

지금부터 살펴볼 내용으로 1장을 완성할 수 있다. 1장에서는 작은 예를 통해 행렬 분해 $A = CR$ 을 소개했다. 이때 선형독립인 열의 의미는 배웠지만, 체계적으로 선형독립인 열을 찾는 방법을 알 수 없었다. 이제 방법이 생겼다. 행렬 A 에 소거를 적용하여 R_0 로 만든다. 그러면 R_0 안에 있는 I 는 행렬 A 에서 선형독립인 열들로 이루어진 행렬 C 의 위치를 알려준다. 그런 다음 R_0 에서 영행을 제거하면 $A = CR$ 에서의 행렬 R 이 된다.

우리는 두 개의 특별해 s_1, s_2 를 얻는다(R 안에 있는 F 의 모든 열 각각에 대해 하나의 해를 얻는다).

EX 2 앞서 살펴본 [EX 2]를 다시 이어서 살펴보자.

$$Rs_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 1, 0 \text{을 각각 두 번째, 네 번째 위치에 할당}$$

$$Rs_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 0, 1 \text{을 각각 두 번째, 네 번째 위치에 할당}$$

s_1, s_2 는 행렬 $-F, I, P^T$ 를 이용하면 가장 쉽게 확인할 수 있다.

- $[I \ F]x = 0$ 의 두 특별해는 [EX 1]에서 $\begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$ 의 열들이다.
- $[I \ F]Px = 0$ 의 특별해는 [EX 2]에서 $P^T \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$ 의 열들이다.

첫 번째 경우에는 치환행렬이 $P = I$ 이므로 쉽다. 두 번째 경우에는 모든 치환행렬 P 에 대해 PP^T 가 항등행렬이므로 다음과 같이 옳은 결과이다.

$$Rx = 0 \Rightarrow [I \ F]P \text{와 } P^T \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} \text{를 곱하면, } [I \ F] \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} = [0] \text{로 간단해진다.}$$

앞서 살펴본 내용을 복습하자. 우선 $m \times n$ 행렬의 랭크가 r 이라 가정한다. $Ax = 0$ 의 $(n-r)$ 개의 특별해를 구하기 위해, 행렬 A 의 기약행 사다리꼴 R_0 를 계산한다. R_0 의 마지막 $(m-r)$ 개의 영행을 제거하여 $R = [I \ F]P$ 와 $A = CR$ 을 얻는다. 그러면 $Ax = 0$ 의 특별해는 $P^T \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$ 의 $(n-r)$ 개의 열이다. 3장의 마지막 페이지에 있는 내용을 참고하라.

EX 3 행렬 A 에 소거법을 적용하면 R_0 와 R 을 얻는다. R 은 행렬 A 의 영공간을 알려 준다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_0 \quad (R_0 \text{의 랭크는 } 2)$$

그러면 $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이고 A, R_0, R 의 선형독립인 열은 1열과 3열이다.

$Ax = 0$ 과 $Rx = 0$ 을 풀기 위해 $x_2 = 1$ 로 설정한다. 그러면 $x_1 = -2, x_3 = 0$ 을 얻는다. 따라서 특별해는 $s = (-2, 1, 0)$ 이다. 모든 해는 $x = (-2c, c, 0)$ 이다. 그리고 $A = CR$ 은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = CR = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (C \text{의 열 기저}) \times (R \text{의 행 기저})$$

행렬 A 의 각 행을 R 의 행들의 선형결합으로 나타낼 수 있을까? 그렇다. $A = CR$ 을 이용하면 된다. 행렬 A 의 세 행은 C 의 세 행과 R 의 두 행의 곱이다.

많은 행렬의 경우, $Ax = 0$ 의 유일한 해는 $x = 0$ 이다. 이는 행렬 A 의 열이 선형독립인 경우이다. 영공간 $N(A)$ 는 영벡터만 포함한다. 즉 특별해가 없다. $Ax = 0$ 을 만드는 유일한 열들의 선형결합은 0과 $x = 0$ 의 선형결합뿐이다.

원점만 있는 영공간 Z 는 굉장히 중요하다. 이 경우 행렬 A 의 열은 선형독립이다. 열들의 어떠한 결합도 영벡터를 만들지 않는다(단, $x = 0$ 이 아닐 때). $n > m$ 인 경우에는 이런 상황이 발생하지 않는다. 다시 말해 $\mathbb{R}^m$ 에서 n 개의 선형독립인 열을 가질 수 없다.

이제 중요한 사실 하나를 알아보려고 한다. 행렬 A 에 행보다 열이 더 많다고 가정하자. $n > m$ 인 경우이므로 적어도 하나의 자유변수가 있다. 연립방정식 $Ax = 0$ 에 $x = 0$ 이 아닌 해가 하나 이상 존재한다.

$Ax = 0$ 에서 방정식보다 미지수의 개수가 더 많다고 가정하자($n > m$). 그러면 최소한 $(n - m)$ 개의 자유변수가 있어야 한다. $Ax = 0$ 은 $N(A)$ 안에서 0이 아닌 해를 가져야 한다.

영공간은 부분공간이다. 영공간의 ‘차원’은 자유변수의 개수이다. 부분공간의 차원에 대한 내용은 3.5절에서 설명한다.

EX 4 다음과 같은 행렬 A, B, M 의 영공간과 $Mx = 0$ 의 두 특별해를 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A \\ 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}, \quad M = [A \quad 2A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

방정식 $Ax = 0$ 의 해는 오직 $x = 0$ 뿐이다. 행렬 A 의 영공간은 $Z = \{0\}$ 이다. 즉 $\mathbb{R}^2$ 의 단 하나의 점 $x = 0$ 만 포함된다. 이 사실은 다음과 같은 소거 과정에서 알 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R = I \quad \text{자유변수도 없고, } F \text{도 없다}$$

A 는 가역행렬이다. 그리고 $Ax = 0$ 의 특별해는 없다. 행렬 A 의 두 열에는 피벗이 있다.

직사각행렬 B 는 동일한 영공간 Z 를 갖는다. $Bx = 0$ 에서 처음 두 방정식은 해가 $x = 0$ 이 되도록 만든다. 마지막 두 방정식도 해가 $x = 0$ 이 되도록 만든다. 방정식을 추가하면(즉 추가 행을 제공하면) 영공간은 커질 수 없다. 왜냐하면 추가 행은 영공간의 벡터 x 에 더 많은 조건을 부과하기 때문이다.

그러나 직사각행렬 M 의 경우는 다르다. 행렬 M 은 행보다 열이 많다. 해가 되는 벡터 x 에는 4개의 성분이 있다. 소거법을 적용하면 행렬 M 의 처음 두 열에 피벗이 있다. 행렬 M 의 마지막 두 열은 ‘자유’이다. 여기에는 피벗이 없다.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = [I \ F]$$

자유변수 x_3, x_4 로는 1과 0을 특별히 선택할 수 있다. 처음에는 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 그리고 두 번째에는 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 로 선택한다. 피벗변수 x_1, x_2 는 방정식 $Rx = 0$ 에 의해 결정된다. 이렇게 두 특별해를 행렬 M 의 영공간으로부터 얻는다. 행렬 M 의 영공간은 행렬 R 의 영공간과 동일하다. 다시 말해 소거를 통해 해가 바뀌지는 않는다.

$Mx = 0$ 의 특별해

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Rs_1 = 0, \quad Rs_2 = 0$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{c} 0 \\ -2 \end{array} \right\} \text{2개의 피벗변수} \\ \left. \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\} \text{2개의 자유변수} \end{array}$$

3단계의 블록 소거법 : 최종 정리

행렬 표기의 가치는 큰 그림을 보여준다는 것이다. 지금까지는 소거를 보통 한 번에 한 열씩 실행되는 것으로 설명했다. 그러나 행렬 A 의 블록을 사용하면 빠른 3단계로 **블록 소거법**(block elimination)을 설명할 수 있다. 이때 행렬 A 의 랭크는 r 로 가정한다.

[1단계] P_C 를 이용해 행렬 A 의 열의 위치를 바꾼다. P_R 을 이용해 행렬 A 의 행의 위치를 바꾼다. 즉 $P_R A P_C$ 에서 r 개의 선형독립인 열과 r 개의 선형독립인 행이 먼저 오도록 배치한다.

$$P_R A P_C = \begin{bmatrix} W & H \\ J & K \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} W \\ J \end{bmatrix} \text{와 } B = [W \ H] \text{는 모두 최대 랭크 } r \text{을 가짐}$$

[2단계] r 개의 상단 행에 W^{-1} 를 곱하여 $W^{-1}B = [I \ W^{-1}H] = [I \ F]$ 를 얻는다.

[3단계] $P_R A P_C = \begin{bmatrix} W & H \\ J & K \end{bmatrix}$ 의 $(m-r)$ 개의 아래 행 $[J \ K]$ 로부터 $J[I \ W^{-1}H]$ 를 빼서 $[0 \ 0]$ 을 얻는다.

앞의 3단계의 결과로 다음과 같이 기약행 사다리꼴 R_0 를 얻는다.

$$P_R A P_C = \begin{bmatrix} W & H \\ J & K \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I & W^{-1}H \\ J & K \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I & W^{-1}H \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R_0 \quad (1)$$

설명이 필요한 다음 2가지 사실이 있다. 이 사실들은 [2단계]와 [3단계]로 이어진다.

❶ $r \times r$ 행렬 W 는 가역행렬이다.

❷ $JW^{-1}H = K$ 가 성립한다.

이제 ❶, ❷에 대해 자세히 살펴보자.

❶ W 의 가역성을 알아보기 위해, 분해 $A = CR$ 을 다시 생각해보자. 행렬 B 안에 있는 행렬 A 의 r 개의 선형독립인 행에 초점을 맞추면 $B = WR$ 이다. 행렬 B , R 은 랭크가 r 이고 W 는 $r \times r$ 행렬이므로, W 는 랭크가 r 인 가역행렬이다.

❷ $[I \ W^{-1}H]$ 의 처음 r 개의 행은 선형독립이다. 행렬 A 의 랭크가 r 이므로, $[J \ K]$ 의 하위 행들은 상위 행들의 선형결합이어야 한다. 이 선형결합은 J 에 의해 주어지며, 처음 r 개의 열을 정확히 제공해야 한다($JJ = J$). 그러면 J 와 $W^{-1}H$ 의 곱은 K 와 같아져서 마지막 열을 정확하게 생성한다.

$$\text{결론 : } P_R A P_C = \begin{bmatrix} W \\ J \end{bmatrix} W^{-1} [W \ H] = C W^{-1} B$$

열행렬 C 와 행행렬 B 의 행에 모두 W 가 포함되므로 중간 인수 W^{-1} 가 필요하다.

3.2 연습문제

1. A 와 $R = EA$ 는 왜 동일한 영공간을 갖는가? 단, E 는 가역행렬이라 가정한다.
2. 다음 행렬 A 와 B 에 대해 기약행 사다리꼴 R 과 랭크 r 을 구하라. 피벗 열은 무엇인가? 또 $Ax = 0$ 과 $Bx = 0$ 의 특별해를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c & c \\ c & c \end{bmatrix}$$

3. $Rx = 0$ 의 특별해가 s_1, s_2 가 되도록 하는 2×4 행렬 R 을 구하라.

$$s_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{피벗 열은 } 1, 3\text{열} \\ \text{자유변수는 } x_2, x_4 \\ x_2, x_4 \text{는 } 1, 0 \text{과 } 0, 1 \end{array}$$

s_1, s_2 로 생성되는 영공간 $N(A)$ 를 갖는 모든 2×4 행렬에 대해 설명하라.

4. 다음 행렬 A, B 를 기약행 사다리꼴 R 로 만들어라. 그리고 A, B 를 CR 형태로 나타내라.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

5. [문제 4]의 행렬 A 에 대해 $Rx = 0$ 의 특별해를 구하라. 각 자유변수는 1로 놓고 나머지 자유변수는 0으로 하라. $Rx = 0$ 의 해를 모두 구하라.

6. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라(참이면 이유를 제시하고, 거짓이면 반례를 찾으라).

(a) 정사각행렬에는 자유변수가 없다(열은 선형독립이다).

(b) 가역행렬에는 자유변수가 없다.

(c) $m \times n$ 행렬에는 n 개보다 많은 피벗변수가 존재하지 않는다.

(d) $m \times n$ 행렬에는 m 개보다 많은 피벗변수가 존재하지 않는다.

7. C 는 $r \times r$ 가역행렬이며 $A = [C \ C]$ 이다. A 를 CR 로 분해하고 $Ax = 0$ 의 r 개의 선형독립인 해를 구하라(이 해가 행렬 A 의 영공간의 기저를 이룬다).

8. 자유 열(이전 열들과 선형종속인 열)이 다음과 같도록, 가능한 한 많은 1을 넣은 4×8 크기의 기약행 사다리꼴 행렬 R 을 만들어라.

(a) 2, 4, 5, 6

(b) 1, 3, 6, 7, 8

9. 3×5 행렬의 4열의 성분이 모두 0이라 가정하자. 그러면 x_4 는 분명히 _____ 변수이다. 이 변수에 대한 특별해는 벡터 $x = \underline{\hspace{1cm}}$ 이다.

10. 3×4 행렬의 첫 번째 열과 마지막 열이 동일하다고 가정하자(단, 영벡터는 아니다). 그러면 _____은 (는) 자유변수이다. 이 자유변수에 대한 특별해를 구하라.

11. 5×5 행렬의 영공간은 행렬에 _____개의 피벗이 있을 때 $x = 0$ 만 포함한다. 이 경우 영공간은 $\mathbb{R}^5$ 이다. 그 이유를 설명하라.

12. $m \times n$ 행렬에 r 개의 피벗이 있다고 가정하자. 특별해의 개수는 _____이다. 영공간은 $r = \underline{\hspace{1cm}}$ 일 때 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 만 포함한다. 열공간은 랭크가 $r = \underline{\hspace{1cm}}$ 인 경우 $\mathbb{R}^m$ 전체가 된다.

13. (꼭 풀어볼 만한 문제) 평면 $x - 3y - z = 12$ 는 $x - 3y - z = 0$ 과 평행하다. 이 평면 위의 점 중 하나는 $(12, 0, 0)$ 이다. 이 평면 위의 모든 점은 다음과 같은 형태이다. 빈칸을 채워라.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \square \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \square \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

14. 4개의 피벗이 있는 4×5 행렬에서 $(1\text{열}) + (3\text{열}) + (5\text{열}) = \mathbf{0}$ 이라 가정하자. 피벗이 없는 열은 무엇인가? 또 특별해는 무엇인가? $\mathbf{N}(A)$ 에 대해 설명하라.

※ [문제 15~20]은 특정 성질을 가진 행렬에 관한 문제이다.

15. $\mathbf{N}(A)$ 가 $(2, 2, 1, 0)$ 과 $(3, 1, 0, 1)$ 의 모든 선형결합으로 이루어지도록 하는 행렬 A 를 구하라.

16. $\mathbf{N}(A)$ 가 $(4, 3, 2, 1)$ 의 모든 상수배가 되도록 하는 행렬 A 를 구하라. 또 행렬 A 의 랭크를 구하라.

17. 열공간이 $(1, 1, 5)$ 와 $(0, 3, 1)$ 을 포함하고, 영공간이 $(1, 1, 2)$ 를 포함하는 행렬을 구하라.

18. 열공간이 $(1, 1, 0)$ 과 $(0, 1, 1)$ 을 포함하고, 영공간이 $(1, 0, 1)$ 을 포함하는 행렬을 구하라.

19. 영공간이 열공간과 동일한 2×2 행렬을 구하라(이 경우는 가능하다).

20. 왜 영공간과 열공간이 동일한 3×3 행렬은 존재할 수 없는가?

21. $AB = \mathbf{0}$ 이면 행렬 B 의 열공간은 행렬 A 의 _____에 포함된다. 그 이유는 무엇인가?

22. 성분을 무작위로 선택하여 3×3 행렬 A 를 만들 때, 행렬 A 의 기약행 사다리꼴 R 은 대부분 어떤 특징을 갖는가? 또 성분을 무작위로 선택하여 4×3 행렬 A 를 만들 때, 행렬 A 의 기약행 사다리꼴 R 은 어떤 특징을 갖는가?

23. $\mathbf{N}(A)$ 가 $\mathbf{x} = (2, 1, 0, 1)$ 에 상수를 곱한 벡터로만 구성될 때, 행렬 A 의 기약행 사다리꼴 R 과 R 의 랭크를 구하라.

24. $Rx=0$ 의 특별해가 다음과 같은 영공간 행렬 N 의 열에 있다면, 역으로 진행하여 기약행 사다리꼴 R 의 영행이 아닌 행을 찾으라.

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

25. 다음 물음에 답하라.

- (a) 모든 성분이 0 또는 1인 5개의 2×2 기약행 사다리꼴 행렬은 무엇인가?
 (b) 모든 성분이 0 또는 1인 8개의 1×3 행렬은 무엇인가? 8개의 행렬이 모두 기약행 사다리꼴 행렬인가?

26. A 가 4×4 가역행렬인 경우, 4×8 행렬 $B = [A \ A]$ 의 영공간에 대해 설명하라. 왜 행렬 A 와 $-A$ 가 항상 동일한 기약행 사다리꼴 R 을 갖는지 설명하라.

27. $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 일 때, 영공간 $N(C)$ 는 $N(A)$, $N(B)$ 와 어떤 관련이 있는가?

28. 다음 행렬에 대해 기약행 사다리꼴 행렬 R_0 , R 을 각각 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

29. 두 피벗변수가 처음이 아닌 마지막에 있다고 가정하자. 기약행 사다리꼴 행렬 R (열은 3개)과 특별해를 포함하는 영공간 행렬 N 에 대해 설명하라.

30. 행렬 A 가 r 개의 피벗 열을 가질 때, A^T 가 r 개의 피벗 열을 갖는다는 것을 어떻게 알 수 있는가? A 와 A^T 의 피벗 열의 번호가 다르게 되도록 하는 3×3 행렬의 예를 제시하라.

31. 다음 행렬들의 랭크가 1이 되도록 빈칸을 채워라.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & \square & \square \\ g & \square & \square \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \square & 9 & \square \\ 1 & \square & \square \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \square \end{bmatrix}$$

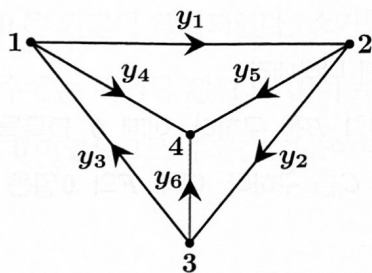
32. 만약 A 가 랭크 1 행렬이면, R 의 2행은 _____이다. 이러한 행렬의 예를 제시하라.

33. 행렬 A 의 랭크가 r 이면, A 는 가역인 $r \times r$ 부분행렬 S 를 포함한다. 다음 행렬 A, B, C 에서 $(m-r)$ 개의 행과 $(n-r)$ 개의 열을 제거하여 가역인 부분행렬 S 를 구하라. 피벗 행과 피벗 열은 유지할 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

34. A 와 B 가 동일한 기약행 사다리꼴 R 을 갖는다고 가정할 때, 다음 물음에 답하라.
 (a) A 와 B 는 동일한 영공간과 동일한 행공간을 가짐을 보여라.
 (b) $E_1 A = R$, $E_2 B = R$ 이다. 이에 따라 행렬 A 는 어떤 행렬과 행렬 B 의 곱이 되는가?

35. 키르히호프의 전류법칙(Kirchhoff's current law) $A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ 은 모든 노드에서 들어오는 전류와 나가는 전류가 같다는 것이다. 이는 노드 1에서 $y_3 = y_1 + y_4$ (참고로 화살표는 전류의 양의 방향을 나타낸다)를 의미한다. A^T 를 기약행 사다리꼴 R (행은 3개)로 축소하고, A^T 의 영공간에서 3개의 특별해를 구하라.



$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

36. 행렬 C 는 행렬 A 의 r 개의 피벗 열을 포함한다. $r \times m$ 행렬 C^T 의 r 개의 피벗 열을 구하라. 그리고 이를 전치하여 행렬 A 내부의 가역인 $r \times r$ 부분행렬 S 를 구하라. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ 에 대해 3×2 행렬 C 를 구하라. 그리고 2×2 가역행렬 S 를 구하라.

37. 왜 열공간 $C(AB)$ 가 $C(A)$ 의 부분공간인가? 이 경우 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ 이다.
38. 행렬 B 의 j 열이 행렬 B 의 이전 열들의 선형결합이라 가정하자. 행렬 AB 의 j 열이 행렬 AB 의 이전 열들의 동일한 선형결합임을 보여라. 그러면 행렬 AB 는 새로운 피벗 열을 가질 수 없으므로 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$ 이다.

39. (중요한 문제) A, B 가 $n \times n$ 행렬이고 $AB = I$ 라 가정하자. $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ 로부터 행렬 A 의 랭크가 n 임을 증명하라. 이에 따라 행렬 A 는 가역행렬이므로, 행렬 B 는 A 의 역행렬이어야 한다. 따라서 $BA = I$ 이다(당연한 사실은 아니다).

40. A 는 2×3 행렬, B 는 3×2 행렬이고 $AB = I$ 이다. 랭크를 이용해 $BA \neq I$ 임을 증명하라. 그리고 $AB = I$ 가 되는 행렬 A, B 의 예를 제시하라. $m < n$ 인 경우, 오른쪽 역행렬은 왼쪽 역행렬이 아니다.

41. 다음 행렬 A, B, C 에 대해 특별해를 포함하는 영공간 행렬 N 을 각각 구하라.

$$2 \times 2 \text{ 블록행렬 } A = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} I & I & I \end{bmatrix}$$

42. A 는 랭크가 r 인 $m \times n$ 행렬이다. 행렬 A 의 (영행을 포함하는) 기약행 사다리꼴은 R_0 이다. R_0^T 의 기약행 사다리꼴을 전치할 때 나오는 행렬 $Z = (\text{rref}(A^T))^T$ 의 형태와 모든 성분에 대해 설명하라.

43. (꼭 풀어볼 만한 문제) $R_0 = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 은 랭크가 r 인 $m \times n$ 행렬이다. 처음에는 피벗 열이 온다. 다음 물음에 답하라.

(a) R_0 의 네 블록의 모양을 m, n, r 을 이용해 나타내라.

(b) $r = m$ 일 때 $R_0 B = I$ 가 되는 오른쪽 역행렬 B 를 구하라. 이때 0 블록들은 사라진다.

(c) $r = n$ 일 때 $C R_0 = I$ 가 되는 왼쪽 역행렬 C 를 구하라. 이때 F 와 0 열은 사라진다.

(d) R_0^T 의 기약행 사다리꼴을 구하라.

(e) $R_0^T R_0$ 의 기약행 사다리꼴을 구하라.

44. R_0 에 도달하도록 행렬 A 에 기본 열 연산뿐만 아니라 기본 행 연산도 허용한다고 가정하자. 랭크가 r 인 $m \times n$ 행렬 A 의 '행과 열이 축소된 형태'는 무엇인가?

45. 다음 행렬 A 를 $A = CR = CW^{-1}B$ 형태로 분해하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

46. 다음을 만족하는 행렬 $\begin{bmatrix} W & H \\ J & JW^{-1}H \end{bmatrix}$ 에서 블록 1행에 무엇을 곱하면 블록 2행과 같아지는가?

$$\begin{bmatrix} W \\ J \end{bmatrix} [W^{-1}] [W \ H] = \begin{bmatrix} W & H \\ J & JW^{-1}H \end{bmatrix}$$

3.3 $Ax = b$ 의 완전해

1. $Ax = b$ 의 **완전해**(complete solution)¹ : $x = (\text{특수해}(\text{particular solution}) x_p) + (\text{영공간의 임의의 벡터 } x_n)$
2. $Ax = b$ 에 소거를 적용하면 $R_0x = d$ 가 된다. R_0 의 영행이 있는 위치와 동일한 d 의 위치에도 0이 있을 때, 방정식 $R_0x = d$ 의 해가 존재한다.
3. $R_0x = d$ 의 해가 존재할 때, 하나의 특수해 x_p 는 모든 자유변수가 0이다.
4. $N(A) = \{\text{영벡터}\}$ 일 때, 행렬 A 는 **최대 열 랭크**(full column rank) $r = n$ 을 갖는다. 이때 자유변수는 없다.
5. 열공간 $C(A)$ 가 $\mathbb{R}^m$ 일 때, 행렬 A 는 **최대 행 랭크**(full row rank) $r = m$ 을 갖는다. 이때 $Ax = b$ 는 항상 해를 갖는다.

앞 절에서 $Ax = 0$ 은 완전히 해결되었다. 소거를 통해 $Ax = 0$ 에 대한 문제는 $R_0x = 0$ 으로 변환되었다. 자유변수에는 특별한 값(1과 0)이 주어졌다. 그런 다음 역대입법을 통해 피벗변수를 구했다. 우변 b 는 0이었으므로 주의를 기울이지 않았다. 따라서 R_0 에 있는 영행도 문제가 되지 않았다.

벡터 b 는 0이 아니다. 좌변의 행 연산은 우변에도 작용해야 한다. $Ax = b$ 는 동일한 해(해가 존재할 경우)를 가진 더 간단한 연립방정식 $R_0x = d$ 로 축소된다. 이제 벡터 b 를 행렬 A 의 열로 추가하자. 다음과 같이 행렬 A 의 오른쪽에 $(b_1, b_2, b_3) = (1, 6, 7)$ 을 '추가'하여 **첨가행렬** $[A \ b]$ 를 생성한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \text{의 첨가행렬은 } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} = [A \ b] \text{이다.}$$

일반적인 소거 단계를 적용하면 행렬 A 는 R_0 로, 벡터 b 는 d 로 바뀐다. 위 예의 경우, 3행에서 1행과 2행을 뺀다. 그러면 소거를 통해 R_0 에 영행이 생성되고, 벡터 $b = (1, 6, 7)$ 은 새로운 우변 벡터 $d = (1, 6, 0)$ 으로 바뀐다.

¹ 완전해를 일반해(general solution)라고도 한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{의 첨가행렬은 } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [R_0 \ d] \text{이다.}$$

마지막 행이 중요하다. 마지막 행의 세 번째 방정식은 $0 = 0$ 이 되었다. 따라서 이 방정식의 해는 존재한다. 원래 행렬 A 에서 1행과 2행을 더하면 3행과 같다. $Ax = b$ 의 해가 존재하려면 우변도 $b_1 + b_2 = b_3$ 가 되어야 한다. 즉 벡터 b 에서 $1 + 6 = 7$ 이 되어야 한다. 이에 따라 세 번째 방정식 $0 = 0$ 이 나왔다. 이는 해가 존재하기 위한 필수 조건이다.

다음은 일반적인 벡터 $b = (b_1, b_2, b_3)$ 에 대한 첨가행렬이다.

$$[A \ b] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 - b_2 \end{bmatrix} = [R_0 \ d]$$

이제 $b_3 - b_1 - b_2 = 0$ 인 경우에만 세 번째 방정식이 $0 = 0$ 이 된다. 즉 $b_1 + b_2 = b_3$ 여야 한다.

하나의 특수해 $Ax_p = b$

특수해 x_p 들 중 가장 간단한 해는 자유변수를 0으로 선택한 경우이다($x_2 = x_4 = 0$). 그러면 앞의 예에서 $0 = 0$ 이 아닌 두 방정식으로부터 두 피벗변수 $x_1 = 1$ 과 $x_3 = 6$ 을 얻는다. 그러므로 $Ax = b$ (그리고 $R_0x = d$)에 대해 구한 하나의 특수해는 $x_p = (1, 0, 6, 0)$ 이다. 즉 이 특수해의 경우 자유변수는 0이고, 피벗변수는 d 로부터 구한다.

해가 존재하려면 R_0 의 영행이 있는 위치와 동일한 d 의 위치에도 0이 있어야 한다. R_0 의 피벗행과 피벗 열에 항등행렬 I 가 있으므로 x_p 에 있는 피벗변수는 d 로부터 얻는다.

$$R_0x_p = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = d \quad \begin{array}{l} \text{피벗변수 } 1, 6 \\ \text{자유변수 } 0, 0 \\ x_p = (1, 0, 6, 0) \end{array}$$

자유변수에 0을 할당한 다음, 피벗변수를 푸는 방법을 사용한다는 점에 주목하자. 이와 같은 단계는 소거를 통해 $R_0x = d$ 로 만든 다음 빠르게 진행할 수 있다. 자유변수가 0일 때, x_p 의 피벗변수는 이미 우변 벡터 d 에 표시된다.

어떤 특수해 x_p	특수해 x_p 는 오른쪽 방정식의 해	$Ax_p = b$
영공간 안의 모든 벡터 x_n	0이 아닌 $(n-r)$ 개의 특별해 x_n 은 오른쪽 방정식의 해	$Ax_n = 0$

특수해는 $(1, 0, 6, 0)$ 이다. 3.2절에서 살펴본 영공간의 $(4-2)=2$ 개의 특별해는 R_0 의 두 자유 열에서 3, 2, 4의 부호를 바꿈으로써 얻을 수 있다. $Ax=b$ 의 완전해 $x_p + x_n$ 이 어떻게 모든 x_n 을 포함하는지에 주목하라.

$$\begin{aligned} \text{완전해} &= (\text{하나의 } x_p) + (\text{많은 } x_n) \\ x_p &\text{는 특수해} \\ x_n &\text{은 영공간 안의 벡터} \end{aligned} \quad x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Q. A 를 가역인 정사각행렬이라 가정하자($m=n=r$). 이 경우 x_p, x_n 은 무엇인가?

A. 유일한 특수해는 $x_p = A^{-1}b$ 이다. 자유변수는 없고, 영공간 안에 0이 아닌 특별해도 없다. 또한 $R_0 = I$ 에는 영행이 없다. 영공간 안의 유일한 벡터는 $x_n = 0$ 이다. 따라서 완전해는 $x = x_p + x_n = A^{-1}b + 0$ 이다.

2장에서는 영공간에 대해 언급하지 않았다. 왜냐하면 A 가 가역행렬이었기 때문이다. 이 경우 행렬 A 는 항등행렬 I 로 축소되었다. 즉 $[A \ b]$ 는 $[I \ A^{-1}b]$ 가 된다. 그러면 $Ax=b$ 는 $x = A^{-1}b$ 가 되고, 이것이 바로 d 가 된다. 이는 매우 특별한 상황이지만, 가역인 정사각행렬인 경우 해를 가장 편하게 구할 수 있다.

작은 행렬의 경우 직접 계산하여 $[A \ b]$ 를 $[R_0 \ d]$ 로 축소할 수 있다. 큰 행렬의 경우 MATLAB으로 쉽게 구할 수 있다. MATLAB에서 하나의 특수해(우리가 구하는 특수해와 같지 않을 수 있음)는 $x=A \setminus b$ 로 표기한다. 다음은 랭크와 열의 개수가 동일한 최대 열 랭크의 예이다. 따라서 두 열 모두 피벗을 갖는다.

EX 1 다음 행렬과 벡터에 대해 $Ax=b$ 의 해가 존재하도록 하는 (b_1, b_2, b_3) 의 조건을 찾아보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

행렬 A 에 b 를 열로 추가한 첨가행렬 $[A \ b]$ 를 사용해 소거를 진행한다. 우선 $[A \ b]$ 의

2행에서 1행을 뺀다. 그런 다음 1행에 2를 곱한 것을 3행에 더하면 $[R_0 \ d]$ 가 된다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & b_3 + 2b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 + b_1 + b_2 \end{bmatrix} = [R_0 \ d]$$

$b_3 + b_1 + b_2 = 0$ 일 때 세 번째 방정식은 $0 = 0$ 이 된다. 이는 벡터 b 가 행렬 A 의 열공간 안에 있기 위한 조건이다. 그러면 $Ax = b$ 의 해가 존재한다. 행렬 A 의 행들을 모두 더하면 영행이 된다. 따라서 (각각이 방정식이므로) 일관성을 위해 벡터 b 의 성분들을 모두 더하면 0이 되어야 한다.

여기서 $n - r = 2 - 2$ 이므로 자유변수가 없다. 따라서 $Ax = b$ 의 0이 아닌 특별해가 없다. 즉 행렬 A 의 영공간 안에는 $x_n = 0$ 밖에 없다. $Ax = b$ 와 $R_0x = d$ 의 특수해는 최종 열 d 의 맨 위에 있다.

$$r = n \text{인 경우, } Ax = b \text{의 하나의 해 } x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

만약 $b_3 + b_1 + b_2$ 가 0이 아니라면, $Ax = b$ 의 해는 존재하지 않는다(x_p 와 x 가 존재하지 않는다).

[EX 1]은 매우 중요하다. 여기서 행렬 A 의 랭크는 전체 열의 개수와 같다. 모든 열에는 피벗이 있다. 랭크는 $r = n$ 이다. 행렬은 가로가 짧고 세로가 길다($m \geq n$). 행 축소에 따라 행렬의 윗부분은 $R = I$ 가 된다. 따라서 행렬 A 는 랭크가 n 인 R_0 로 축소된다.

$$\text{최대 열 랭크인 경우}(r = n) \quad R_0 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \times n \text{ 항등행렬} \\ (m - n \text{ 개의 } 0 \text{ 행}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

행렬 A 는 선형독립인 열을 갖는다. 행렬 A 의 영공간은 $Z = \{\text{영벡터}\}$ 이다. 이러한 유형의 행렬을 구별하는 다양한 방법을 다음과 같은 목록으로 정리할 수 있다.

최대 열 랭크($r = n$)를 갖는 모든 행렬 A 는 다음과 같은 성질을 갖는다.

- ❶ 행렬 A 의 모든 열은 선형독립인 피벗 열이다. 자유변수는 없다.
- ❷ 영공간 $N(A)$ 에는 영벡터 $x = 0$ 만 포함된다.
- ❸ $Ax = b$ 의 해가 존재한다면(존재하지 않을 수도 있음) 해는 유일하게 존재한다.

$Ax = 0$ 은 $x = 0$ 인 경우에만 가능하다. 나중에는 위 목록에 항목 ④로 ‘행렬 A 의 랭크가 n 일 때, 정사각행렬 $A^T A$ 는 가역행렬이 된다.’라는 사실을 하나 추가할 것이다. 여기서 행렬 A 의 행은 매우 많을 수도 있다.

위와 같은 경우 행렬 A 의 영공간은 영벡터로 축소된다. $Ax = b$ 의 해는 유일하다(해가 존재하는 경우). 또 R_0 에서 $(m-n)$ 개의 행이 영행이 될 것이다. 따라서 벡터 b 에 대해 각 행에서 $0 = 0$ 이 되도록 하는 $(m-n)$ 개의 조건이 있고, 벡터 b 는 행렬 A 의 열공간 안에 있다. 일반적으로 최대 열 랭크를 가지면, $Ax = b$ 는 유일한 해를 갖거나 해를 갖지 않는다.

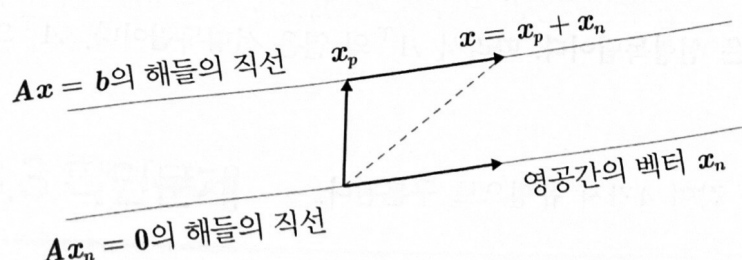
최대 행 랭크와 완전해

또 다른 극단적인 경우는 최대 행 랭크일 때이다. $Ax = b$ 는 유일한 해를 갖거나 무수히 많은 해를 갖는다. 이 경우 행렬 A 는 가로가 길고 세로가 짧아야 한다($m \leq n$). $r = m$ 인 경우 행렬 A 는 최대 행 랭크를 갖는다. 이때 ‘행은 선형독립이다.’ 모든 행에는 피벗이 있다.

EX ② 연립방정식 $Ax = b$ 에는 $n = 3$ 개의 미지수와 $m = 2$ 개의 방정식이 있다.

$$\begin{array}{lcl} \text{최대 행 랭크} & \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{array} & (\text{랭크 } r = m = 2) \end{array}$$

다음은 xyz -공간에 있는 두 평면이다. 평면들이 평행하지 않아서 직선에서 교차한다. 이 직선은 소거를 통해 바로 찾을 수 있다. 특수해는 이 직선 위의 한 점이 될 것이다. 영공간 벡터 x_n 을 더하면 [그림 3.1]과 같이 직선을 따라 이동할 수 있다. 그러면 $x = x_p + (\text{모든 } x_n)$ 이 방정식의 해들의 직선 전체가 된다.



[그림 3.1] 완전해 $x = (\text{하나의 특수해 } x_p) + (\text{모든 영공간에 대한 해 } x_n)$

다음과 같이 $[A \ b]$ 에서 아래쪽으로 소거한 다음 위쪽으로 소거하여 x_p 와 x_n 을 찾는다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = [R \ d]$$

특수해 $(2, 1, 0)$ 에는 자유변수 $x_3 = 0$ 이 있다. 특수해의 성분 중 2, 1은 d 로부터 바로 확인할 수 있다. 영벡터가 아닌 특별해 s 는 $x_3 = 1$ 을 갖는다. 그런 다음 $-x_1$ 과 $-x_2$ 는 R 의 자유 열로부터 바로 확인할 수 있다.

x_p 와 s 가 원래 방정식 $Ax_p = b$ 와 $As = 0$ 을 만족하는지 확인하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{ll} 2+1=3 & -3+2+1=0 \\ 2+2=4 & -3+4-1=0 \end{array}$$

영공간에 대한 해 x_n 은 s 의 임의의 상수배이다. x_n 은 x_p 에서 시작하여 해들의 직선 위를 따라 이동한다.

$$\begin{array}{l} \text{완전해} \\ \text{(특수해)+(영공간에 대한 해)} \end{array} \quad x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

해들의 직선은 [그림 3.1]에 있다. 해들의 직선 위의 모든 점은 특수해가 될 수 있다. 여기서는 $x_3 = 0$ 인 특수해 x_p 를 선택했다. 특수해는 임의의 상수로 곱해지지 않는다.

최대 행 랭크($r = n$)를 갖는 모든 행렬 A 는 다음과 같은 성질을 갖는다.

- ① 행렬 A 의 모든 행에 피벗이 있으며, R_0 에 영행이 없다($R_0 = R$).
- ② 모든 우변 벡터 b 에 대해 $Ax = b$ 의 해가 존재한다.
- ③ 행렬 A 의 열공간은 전체 공간 $\mathbb{R}^m$ 이다.
- ④ $m < n$ 인 경우, 방정식 $Ax = b$ 는 부정(underdetermined), 즉 무수히 많은 해를 갖는다.

m 개의 피벗이 있는 경우 m 개의 행은 선형독립이다. 따라서 A^T 의 열은 선형독립이다. A^T 의 영공간은 영벡터만 포함한다.

선형방정식은 랭크 r 에 따라 다음과 같이 4가지 유형으로 구분된다.

$r = m$ 이고 $r = n$	가역인 정사각행렬	$Ax = b$ 의 해가 유일함
$r = m$ 이고 $r < n$	가로가 길고 세로가 짧은 행렬	$Ax = b$ 의 해가 무수히 많음
$r < m$ 이고 $r = n$	가로가 짧고 세로가 긴 행렬	$Ax = b$ 의 해가 없거나 유일함
$r < m$ 이고 $r < n$	최대 랭크가 아님	$Ax = b$ 의 해가 없거나 무수히 많음

축소된 행렬 R_0 는 행렬 A 와 같은 범주에 속한다. 피벗 열들이 처음에 오는 경우, 위 4가지 유형

을 다음 표와 같이 표기할 수 있다. $R_0x = d$, $Ax = b$ 의 해가 존재하려면, 벡터 d 의 마지막 $(m-r)$ 개의 성분들은 0으로 끝나야 한다. F 는 R_0 의 자유변수 부분이다.

R_0 의 4가지 유형	$[I]$	$[I \ F]$	$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
랭크	$r = m = n$	$r = m < n$	$r = n < m$	$r < m, r < n$

첫 번째, 두 번째 유형은 최대 행 랭크 $r = m$ 인 경우이고, 세 번째, 네 번째 유형은 최대 열 랭크 $r = n$ 인 경우이다.

이 책의 중요한 부분을 마무리하면서 수치 선형대수학에 대해 이야기하고자 한다. 선형방정식 $Ax = b$ 는 매우 기본적인 문제이다. 실제로는 계산속도와 수치적 안정성을 위해 소거 단계의 순서를 조정한다. 컴퓨터를 이용하면 1,000개 정도의 미지수와 방정식으로 이루어진 $Ax = b$ 를 해결할 수 있다(단정밀도(single precision)와 배정밀도(double precision)에서 반올림 허용). 슈퍼컴퓨터는 훨씬 더 큰 연립방정식을 해결할 수 있다. 그러나 행렬의 크기에는 한계가 있다. 그 한계를 넘어서 무엇을 할 수 있을까?

놀랍게도 답은 **랜덤 선형대수학**(randomized linear algebra)이다. 우리는 행렬 A 의 열을 샘플링하고, 관련 오류를 받아들인다. 실제 행렬은 완전히 랜덤행렬은 아니며, 최종 결과는 놀라울 정도로 좋다. 종종 행렬 A 에 대한 근사는 $A \approx CUR$ 과 같이 3개의 항의 곱으로 표현된다. C 는 행렬 A 의 열을 샘플링하는 과정에서 얻으며, R 은 행렬 A 의 행으로부터 얻는다. 더 작은 행렬 U 는 진행 과정에 따라 구성된다. 높은 확률로 근사해는 놀라울 정도로 정확하다.

선형대수학은 살아있다. 계산의 요구사항(속도와 정확성)은 새로운 아이디어로 이어진다. 이 책의 뒷부분에서 다룰 고윳값과 특잇값도 마찬가지이다.

3.3 확인문제

3.3A 이 문제는 소거(피벗 열과 역대입법)를 열공간-영공간-랭크-해의 존재가능성(상위 개념)과 연결한다. 다음 행렬 A 의 랭크는 2이다.

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = b_3 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

- (a) $[A \ b]$ 를 $[U \ c]$ 로 소거하여 $Ax=b$ 를 $Ux=c$ 와 같은 삼각 연립방정식으로 만들어라.
 (b) $Ax=b$ 의 해가 존재하기 위한 b_1, b_2, b_3 의 조건을 찾으라.
 (c) 행렬 A 의 열공간에 대해 설명하라. 열공간은 $\mathbb{R}^3$ 에서 어느 평면인가?
 (d) 행렬 A 의 영공간에 대해 설명하라. $\mathbb{R}^4$ 에서 영벡터가 아닌 어떤 특별해가 있는가?
 (e) $[U \ c]$ 를 $[R_0 \ d]$ 로 축소하라(R_0 로부터 영벡터가 아닌 특별해를, d 로부터 특수해를 얻는다).
 (f) $Ax=(0, 6, -6)$ 의 특수해를 구한 다음, 완전해를 구하라.

풀이

- (a) 소거에서의 승수는 2, 3, -1이다. 이를 이용해 $[A \ b]$ 를 $[U \ c]$ 로 바꾸면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix}$$

- (b) 위 식의 마지막 방정식에서 해의 존재 조건 $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$ 을 확인할 수 있다. 그러면 $0=0$ 이 된다.
 (c) 첫 번째로, 열공간은 행렬 A 의 피벗 열 (1, 2, 3)과 (3, 8, 7)의 모든 선형결합을 포함하는 평면이다. 피벗은 1열과 3열에 있다. 두 번째로, 열공간은 $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$ 을 만족하는 모든 벡터를 포함한다. 이 조건에 따라 $Ax=b$ 의 해가 존재하고, 따라서 벡터 b 는 열공간 안에 있다. 행렬 A 의 모든 열이 조건 $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$ 을 통과한다. 이 조건의 식은 첫 번째 설명에서 언급한 평면의 방정식이다.
 (d) 영공간에 대한 특별해는 자유변수로 $x_2 = 1, x_4 = 0$ 과 $x_2 = 0, x_4 = 1$ 을 갖는다.

$$\begin{array}{l} Ax=0 \text{의 특수해} \\ Ux=0 \text{에서의 역대입법} \\ \text{또는 } R \text{에서의 2, 2, 1의 부호 변환} \end{array} \quad s_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ 안의 영공간 $N(A)$ 는 모든 $x_n = c_1 s_1 + c_2 s_2$ 를 포함한다.

- (e) 축소된 R_0 에서는 U 의 3열 (3, 2, 0)이 (0, 1, 0)으로 바뀐다. 우변 벡터 $c=(0, 6, 0)$ 은 $d=(-9, 3, 0)$ 이 되고, 이는 x_p 에서 -9, 3으로 나타난다.

$$[U \ c] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [R_0 \ d] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (f) $x_p = (-9, 0, 3, 0)$ 은 자유변수 $x_2 = x_4 = 0$ 을 갖는 특수해이다. $Ax=(0, 6, -6)$ 의 완전해는 $x = x_p + x_n = x_p + c_1 s_1 + c_2 s_2$ 이다.

3.3B 특정한 벡터 b 에 대한 $Ax=b$ 의 해에 대해 다음 정보를 갖고 있다고 가정하자. 각각의 경우, m, n, r, A, b 에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

- (a) 해가 유일하게 존재한다.
- (b) $Ax=b$ 의 모든 해는 $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.
- (c) 해가 존재하지 않는다.
- (d) $Ax=b$ 의 모든 해는 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

풀이

- (a) 해가 유일하게 존재하는 경우이므로, 행렬 A 는 반드시 최대 열 랭크 $r=n$ 을 가져야 한다. 행렬 A 의 영공간은 오직 영벡터만 포함한다. 그리고 벡터 b 는 행렬 A 의 열공간 안에 있다.
- (b) 이 경우 행렬 A 는 $n=2$ 개의 열을 가져야 한다(행의 개수 m 은 임의로 정할 수 있다). 행렬 A 의 영공간 안에 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이 있으므로, 행렬 A 의 2열은 1열에 -1 을 곱한 것이다. 그리고 $A \neq 0$ 이다. 왜냐하면 행렬 A 의 랭크가 1이기 때문이다. $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이 해이므로, $b = 2 \cdot (1\text{열}) + (2\text{열})$ 이다. x_p 를 더 간단한 $(1, 0)$ 으로 선택할 수도 있다.
- (c) 이 경우 벡터 b 가 행렬 A 의 열공간 안에 없다는 사실만 알 수 있다. 행렬 A 의 랭크는 m 보다 작아야 한다. $b \neq 0$ 이어야 한다. 그렇지 않으면 $x=0$ 이 해가 된다.
- (d) 이 경우 행렬 A 는 $n=3$ 개의 열을 가져야 한다. 행렬 A 의 영공간 안에 $(1, 0, 1)$ 이 있으므로, 행렬 A 의 3열은 $-(1\text{열})$ 이다. 행렬 A 의 랭크는 $3-1=2$ 이고, 벡터 b 는 행렬 A 의 $(1\text{열}) + (2\text{열})$ 이다.

3.3C $[A \ b]$ 에 대한 순방향 소거를 이용해 완전해 $x = x_p + x_n$ 을 구하라.

풀이

소거를 통해 $R_0x=d$ 를 얻는다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$b=0$ 일 때 영공간에 대한 해 x_n 을 구하기 위해, 다음과 같이 자유변수 x_2, x_4 를 1, 0과 0, 1로 놓는다.

영공간에 대한 특별해
특수해

$$s_1 = (-2, 1, 0, 0) \text{와 } s_2 = (4, 0, -4, 1) \\ x_p = (7, 0, -3, 0)$$

그러면 $Ax=b$ 의 완전해는 $x = x_p + c_1s_1 + c_2s_2$ 이다.

행렬 A 의 행들은 $2 \cdot (1\text{행}) + (2\text{행}) - (3\text{행}) = (0, 0, 0, 0)$ 으로부터 영행을 생성한다. 벡터 $b = (4, 2, 10)$ 에 대한 동일한 선형결합은 $2 \cdot 4 + 2 - 10 = 0$ 을 생성한다. (좌변에 있는) 행렬 A 의 행들의 선형결합이 영행을 만든다면, 동일한 계수의 선형결합이 우변에서도 0을 만들어야 한다. 그렇지 않으면 해가 존재하지 않는다.

이 결과를 다른 방식으로 표현할 수도 있다. 행렬 A 의 모든 열이 $y = (2, 1, -1)$ 과 직교한다면, 열들의 선형결합인 벡터 b 도 y 와 직교해야 한다. 그렇지 않으면 벡터 b 는 열공간 안에 없고, $Ax = b$ 의 해는 존재하지 않는다.

그리고 y 가 A^T 의 영공간 안에 있다면, y 는 행렬 A 의 열공간 안에 있는 모든 벡터 b 와 직교해야 한다.

3.3 연습문제

1. **(꼭 풀어볼 만한 문제)** [확인문제 3.3A]의 (a)~(f) 단계를 실행하여 다음 행렬 A 의 열공간과 영공간을 구하고, $Ax = b$ 의 완전해를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. 랭크가 1인 다음 행렬 A 에 대해 [확인문제 3.3A]의 (a)~(f) 단계를 실행하라. $Ax = b$ 의 해가 존재하는 b_1, b_2, b_3 의 2가지 조건을 구하라. 벡터 b 를 행렬 A 의 어떤 공간에 넣어야 하는가?

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

※ [문제 3~15]는 $Ax = b$ 의 해에 관한 문제이다. 마지막 열로 벡터 b 를 추가한 첨가행렬에서 시작하여 x_p, x_n 을 구하는 단계를 따른다.

3. 다음 연립방정식의 완전해를 (특수해 x_p) + (영공간 안의 벡터 s 의 임의의 상수배) 형태로 나타내라.

$$(a) \quad \begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ 2x + 6y &= 14 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} x + 3y + 3z &= 1 \\ 2x + 6y + 9z &= 5 \\ -x - 3y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

4. 다음 연립방정식의 완전해 $x = x_p + x_n$ 을 구하라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. 다음 연립방정식의 해가 존재하는 b_1, b_2, b_3 의 조건은 무엇인가? 벡터 $\mathbf{b}$ 를 4열로 추가한 첨가행렬에 소거를 적용하라. 그리고 각 조건이 성립할 때 완전해를 구하라.

$$(a) \begin{cases} x + 2y - 2z = b_1 \\ 2x + 5y - 4z = b_2 \\ 4x + 9y - 8z = b_3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x + 2y = b_1 \\ 4x + 4y = b_2 \\ 8x + 8y = b_3 \end{cases}$$

6. 다음 연립방정식의 해가 존재하는 b_1, b_2, b_3, b_4 의 조건은 무엇인가? 각 조건이 성립할 때 해 $\mathbf{x}$ 를 구하라.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

7. 소거를 통해 $b_3 - 2b_2 + 4b_1 = 0$ 이 되면, (b_1, b_2, b_3) 가 행렬 A 의 열공간 안에 있음을 보여라. 다음 행렬 A 의 랭크는 $r=2$ 이다. 행렬 A 의 행들의 어떤 선형결합이 영행을 생성하는가?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

8. 어떤 (b_1, b_2, b_3) 가 다음 행렬 A 의 열공간에 있는가? 또한 행렬 A 의 행들의 어떤 선형결합이 영행을 생성하는가?

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

9. 다음과 같이 최대 랭크를 갖는 연립방정식의 완전해 $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$ 을 구하라.

$$(a) x + y + z = 4$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

10. 특수해가 $\mathbf{x}_p = (2, 4, 0)$ 이고, 영공간에 대한 해 $\mathbf{x}_n$ 이 $(1, 1, 1)$ 의 임의의 상수배인 2×3 연립방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 를 구성하라.

11. 왜 1×3 연립방정식은 특수해 $\mathbf{x}_p = (2, 4, 0)$ 과 영공간에 대한 해 $\mathbf{x}_n = ((1, 1, 1)$ 의 임의의 상수배)를 가질 수 없는가?

12. 다음 물음에 답하라.

$$(a) A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
가 두 해 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 를 가질 때, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 의 두 해를 구하라.

$$(b) A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
의 또 다른 해를 구하라. 그런 다음 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 또 다른 해를 구하라.

13. 다음 명제가 모두 거짓인 이유를 설명하라.
- (a) 완전해는 x_p 와 x_n 의 임의의 선형결합이다.
 - (b) 연립방정식 $Ax = b$ 는 최대 하나의 특수해를 갖는다. 이 명제는 행렬 A 가 _____일 때 참이다.
 - (c) 모든 자유변수가 0인 해 x_p 는 $\|x\|$ 가 최소인 해이다. 이 명제인 반례를 2×2 행렬로 제시하라.
 - (d) A 가 가역행렬이면 영공간에 대한 해 x_n 은 존재하지 않는다.

14. 행렬 U 의 5열에 피벗이 없다고 가정하자. 그러면 x_5 는 _____ 변수이다. 영벡터는 $Ax = 0$ 의 유일한 해인가? $Ax = b$ 의 해가 존재한다면 몇 개의 해가 존재하는가?

15. 행렬 U 의 3행에 피벗이 없다고 가정하자. 그러면 3행은 _____행이다. $Ux = c$ 의 해는 어떤 경우에 존재하는가? 또 $Ax = b$ 의 해가 존재하는지에 대해 설명하라.

16. 3×5 행렬의 최대 랭크를 구하라. 최대 랭크를 가질 경우, U 와 R 의 모든 _____에 피벗이 있다. $Ax = b$ 의 해는 항상 존재하는가? 유일한가? 행렬 A 의 열공간은 무엇인가? 이와 같은 행렬 A 의 예를 제시하라.

17. 6×4 행렬의 최대 랭크를 구하라. 최대 랭크를 가질 경우, U 와 R 의 모든 _____에 피벗이 있다. $Ax = b$ 의 해는 항상 존재하는가? 유일한가? 행렬 A 의 열공간은 무엇인가? 이와 같은 행렬 A 의 예를 제시하라.

18. 소거를 이용해 다음 행렬 A 와 A^T 의 랭크를 구하라.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 11 & 5 \\ -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & q \end{bmatrix} \text{ (랭크는 } q \text{에 따라 다름)}$$

19. 만약 $Ax = b$ 가 무수히 많은 해를 갖는다면, $Ax = B$ (우변만 바꿈)가 오직 하나의 해만 갖는 것은 왜 불가능한가? $Ax = B$ 의 해가 존재하지 않을 수도 있는가?

20. 다음 행렬에 대해 랭크가 각각 (a) 1 (b) 2 (c) 3이 되도록 하는 q 를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & q \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ q & 2 & q \end{bmatrix}$$

21. $Ax = b$ 의 해의 개수가 각각 다음과 같은 행렬 A 의 예를 제시하라.

- (a) b 에 따라 0개 또는 1개
- (b) b 와 상관없이 ∞ (무수히 많음)
- (c) b 에 따라 0개 또는 ∞ (무수히 많음)
- (d) b 와 상관없이 1개

22. $Ax = b$ 가 다음 조건을 만족할 때, r , m , n 사이의 관계를 모두 설명하라.

- (a) 어떤 b 에 대해서는 해가 존재하지 않음
- (b) 어떤 b 에 대해서는 유일한 해가 존재하고, 다른 b 에 대해서는 해가 존재하지 않음
- (c) 모든 b 에 대해 무수히 많은 해가 존재
- (d) 모든 b 에 대해 유일한 해가 존재

※ [문제 23~27]은 기약행 사다리꼴 R_0 , R 에 관한 문제이다.

23. 다음 행렬의 행을 피벗으로 나눈 다음, 피벗 위쪽의 성분들을 0으로 만들어서 R_0 와 R 을 구하라.

$$(a) U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (c) U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

24. A 가 삼각행렬일 때, $R_0 = \text{rref}(A)$ 는 언제 항등행렬 I 가 되는가?

25. $Ux = 0$ 과 $Ux = c$ 에 소거를 적용하여 $R_0x = 0$ 과 $R_0x = d$ 를 유도하라.

$$[U \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad [U \ c] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

방정식 $R_0x = 0$ 의 해들 중 $x_2 = 1$ 인 x_n 을 구하라. 또 방정식 $R_0x = d$ 의 해들 중 $x_2 = 0$ 인 x_p 를 구하라.

26. $Ux = 0$ 과 $Ux = c$ 를 각각 $R_0x = 0$ 과 $R_0x = d$ 로 축소하라. 그리고 $R_0x = d$ 의 해를 구하라.

$$[U \ 0] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad [U \ c] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

27. (가우스 소거법을 이용해) 다음 식을 $Ux = c$ 로 축소하라. 그다음 $R_0x = d$ 를 유도하라. 그리고 특수 해 x_p 와 영공간에 대한 해 x_n 을 구하라.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = b$$

28. 다음 성질을 만족하는 행렬 A , B 를 구하라. 구할 수 없는 경우에는 그 이유를 설명하라.

(a) $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 의 유일한 해는 $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

(b) $Bx = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 의 유일한 해는 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 이다.

29. 행렬 A 의 LU 분해를 구하라. 그리고 다음 두 벡터 b 에 대해 각각 $Ax = b$ 의 완전해를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

30. $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 의 완전해가 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 일 때, 행렬 A 를 구하라.

31. (꼭 풀어볼 만한 문제) 3×4 행렬 A 에 대해 $Ax = 0$ 의 유일한 특별해가 $(2, 3, 1, 0)$ 이라 가정하자. 다음 물음에 답하라.

(a) 행렬 A 의 랭크와 $Ax = 0$ 의 완전해를 구하라.

(b) 행렬 A 의 기약행 사다리꼴 R_0 를 구하라.

(c) 모든 벡터 b 에 대해 $Ax = b$ 의 해를 구할 수 있음을 어떻게 알 수 있는가?

32. $Ax = b$ 와 $Cx = b$ 가 모든 벡터 b 에 대해 동일한 완전해를 가질 때, 행렬 A 와 C 는 동일한가?

33. 랭크가 r 인 기약행 사다리꼴 R_0 의 열공간에 대해 설명하라. 그리고 R_0 에서 영행들을 지운 행렬 R 에 대해 설명하라.

3.4 독립, 기저, 차원

1. $v_1, \dots, v_k$ 가 **선형독립**(linear independent)인 벡터 : 영벡터를 만드는 유일한 선형결합 $c_1v_1 + \dots + c_kv_k = 0$ 은 모든 c_i 가 0인 경우이다.
2. S 가 벡터 $v_1, \dots, v_k$ 의 모든 선형결합의 집합일 때, 벡터 $v_1, \dots, v_k$ 는 벡터공간 S 를 **생성**(span)한다고 한다.
3. $v_1, \dots, v_k$ 가 (1) 선형독립이고 (2) S 를 생성하면, $v_1, \dots, v_k$ 는 S 의 **기저**(basis)이다.
4. 벡터공간 S 의 **차원**(dimension)은 S 의 기저에 있는 벡터의 개수 k 이다.

이 절은 부분공간의 실제 크기에 대한 내용을 다루는 중요한 절이다. $m \times n$ 행렬에는 n 개의 열이 있다. 그러나 열공간의 '차원'이 반드시 n 인 것은 아니다. 열공간 $C(A)$ 의 차원은 선형독립인 열의 개수이다. 이 절에서는 열공간의 차원이 랭크 r 임을 다시 한 번 확인할 것이다.

선형독립의 개념은 임의의 벡터공간의 임의의 벡터 $v_1, \dots, v_n$ 에 적용된다. 이 절의 대부분 내용

은 이미 알고 있는 부분공간, 특히 열공간과 영공간에 중점을 둔다. 마지막 부분에서는 열벡터가 아닌 ‘벡터’도 다룬다. 이 벡터들은 행렬이나 함수일 수 있으며, 선형독립이거나 선형종속일 수 있다. 먼저 열벡터를 사용한 주요 예를 살펴보자.

목표는 벡터공간을 생성하는 선형독립인 벡터들의 모임인 기저를 이해하는 것이다. 벡터공간의 모든 벡터는 기저벡터들의 유일한 선형결합이다.

이 절에서 소개할 중요한 4가지 아이디어와 각 아이디어의 의미에 대한 간단한 힌트는 다음과 같다.

- ❶ 선형독립인 벡터 : 추가 벡터 없음
- ❷ 벡터공간 생성 : 벡터공간을 생성하기에 충분한 벡터
- ❸ 벡터공간의 기저 : 너무 많지도, 적지도 않음
- ❹ 벡터공간의 차원 : 모든 기저의 벡터 개수

선형독립

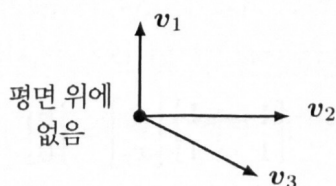
선형독립에 대한 첫 번째 정의는 전통적인 정의는 아니지만, 여러분은 배울 준비가 되어 있다.

정의 선형독립

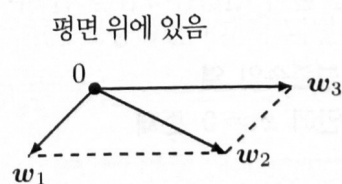
$Ax = 0$ 의 유일한 해가 $x = 0$ 일 때, 행렬 A 의 열들은 선형독립이다. 다른 어떤 열들의 선형결합 Ax 도 영벡터를 만들 수 없다.

영공간 $N(A)$ 가 영벡터만 포함하는 경우, 행렬 A 의 열은 선형독립이다. $\mathbb{R}^3$ 의 세 벡터를 이용해 선형독립(및 선형종속)에 대해 설명한다.

- ❶ 만약 $\mathbb{R}^3$ 의 세 벡터가 동일한 평면 위에 없다면, 이 세 벡터는 선형독립이다. [그림 3.2]에서 $0v_1 + 0v_2 + 0v_3$ 를 제외한 v_1, v_2, v_3 의 모든 선형결합이 영벡터를 만들지 않는다.
- ❷ 세 벡터 w_1, w_2, w_3 가 $\mathbb{R}^3$ 에서 동일한 평면 위에 있으면, 이 세 벡터는 선형종속이다.



(a) 선형독립 : $0v_1 + 0v_2 + 0v_3$ 만 0이 됨



(b) 선형종속 : $w_1 - w_2 + w_3 = 0$

[그림 3.2] 선형독립과 선형종속

선형독립의 개념은 12차원 공간의 7개 벡터에도 적용된다. 만약 이 벡터들이 행렬 A 의 열벡터이고 선형독립이면, 12×7 행렬의 영공간은 오직 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 만 포함한다. 열벡터 중 어떤 벡터도 다른 6개 벡터의 선형결합이 아니다.

이제 앞서 살펴본 선형독립을 벡터공간에서 다른 표현으로 정의해보자.

정의 선형독립과 선형종속

벡터 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 에 대해 영벡터를 만드는 유일한 선형결합이 $0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$ 일 경우, 벡터 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 은 **선형독립**이다. 즉 다음과 같다.

$$\text{선형독립} \quad x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = \mathbf{0} \text{ 은 } \quad (1) \\ \text{모든 계수 } x_1, x_2, \dots, x_n \text{이 } 0 \text{일 때만 발생한다.}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 중 하나라도 0이 아닐 때 선형결합 $x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = \mathbf{0}$ 이 되면, 벡터 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 은 **선형종속**이다.

- 올바른 표현 : 벡터들의 집합이 선형독립이다.
- 허용 가능한 표현 : 벡터들이 선형독립이다.
- 허용 불가능한 표현 : 이 행렬은 선형독립이다.

벡터들의 집합은 선형종속이거나 선형독립이다. 이 벡터들의 선형결합이 영벡터(계수가 0이 아님)를 만들 수도 있고, 만들지 못할 수도 있다. 따라서 여기서 생각해볼 중요한 질문은 “벡터들의 어떤 선형결합이 영벡터를 만드는가?”이다. 선형독립과 선형종속에 대한 $\mathbb{R}^2$ 에서의 몇 가지 작은 예는 다음과 같다.

- ① 벡터 $(1, 0), (1, 0.00001)$ 은 선형독립이다.
- ② 벡터 $(1, 1), (-1, -1)$ 은 선형종속이다.
- ③ 벡터 $(1, 1), (0, 0)$ 은 영벡터 때문에 선형종속이다.
- ④ $\mathbb{R}^2$ 의 세 벡터 $(a, b), (c, d), (e, f)$ 는 선형종속이다.

②의 경우 다음과 같이 선형종속임을 알 수 있다.

$$\text{선형종속인 열} \quad x_1 = 1, x_2 = 1 \text{ 일 때, } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{영공간 안에 } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ 존재}$$

$\mathbb{R}^2$ 에서 세 벡터는 선형독립일 수 없다. 이를 확인하는 방법은 다음과 같다. 세 벡터를 열로 갖는 행렬 A 는 자유변수를 가져야 하고, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 에 대해 0이 아닌 해를 가져야 한다.

이제 $\mathbb{R}^3$ 의 세 벡터를 생각해보자. 이들 중 한 벡터가 다른 벡터의 상수배인 경우, 세 벡터는 선형 종속이다. 그러나 완전하게 판정하려면 세 벡터를 모두 사용해야 한다. 다음과 같이 세 벡터를 행렬에 넣고 $Ax = 0$ 의 해를 구해보자.

EX 1 행렬 A 의 열들은 선형종속이다. $Ax = 0$ 은 0 이 아닌 해를 갖는다.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

행렬 A 의 랭크는 $r = 2$ 이다. 열들이 선형독립이면 최대 열 랭크 $r = n = 3$ 을 갖는다. 정사각행렬의 경우 선형종속인 열은 선형종속인 행을 의미하며, 그 반대의 경우도 마찬가지이다.

Q. $Ax = 0$ 의 해는 어떻게 구할 수 있을까? 해를 구하는 체계적인 방법은 소거이다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{은 } R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{으로 축소} \Rightarrow F = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

최대 열 랭크 : 행렬 A 의 열은 랭크가 $r = n$ 일 때 선형독립이다. 이때 피벗변수는 n 개이고, 자유변수는 없으며 $A = C$ 이다. 행렬 A 의 영공간은 $x = 0$ 만 포함한다.

다음으로 살펴볼 예는 특히 중요하다. 7개의 열에 각각 5개의 성분이 있다고 가정하자($m = 5$ 는 $n = 7$ 보다 작다). 그러면 행렬의 열들은 선형종속이어야 한다. $\mathbb{R}^5$ 의 임의의 7개 벡터는 선형종속이다. 행렬 A 의 랭크는 5보다 클 수 없다. 5개의 행에는 5개 이상의 피벗이 존재할 수 없다. $Ax = 0$ 은 최소 $7 - 5 = 2$ 개의 자유변수를 가지므로, 0 이 아닌 해가 존재한다. 이는 열들이 선형종속임을 의미한다.

$\mathbb{R}^m$ 의 임의의 n 개 벡터의 집합은 $n > m$ 일 때 선형종속이다.

이와 같은 유형의 행렬은 행보다 열이 더 많으며, 가로가 길고 세로가 짧은 형태이다. $n > m$ 이면 열들은 선형종속이다. 왜냐하면 $Ax = 0$ 의 0 이 아닌 해가 존재하기 때문이다. $n \leq m$ 이면 열들은 선형종속일 수도 있고, 선형독립일 수도 있다. 소거를 적용하면 r 개의 피벗 열이 드러난다. 이 열들이 바로 행렬 C 에서 선형독립인 r 개의 피벗 열이다.

[참고] 선형종속을 설명하는 또 다른 방법은 '하나의 벡터가 다른 벡터들의 선형결합'임을 보이는 것이다. 앞서 살펴본 선형종속의 정의는 다음과 같이 더 길었다. '모든 계수가 0인 선형결합을 제외한 어떤 선형결합이 영벡터를 만든다.' 즉 영벡터를 만드는 쉬운 방법은 배제해야 한다.

요점은 선형종속의 기존 정의의 경우, 특정 벡터를 선택하지 않는다는 점이다. 모든 열은 동일하게 취급된다. $Ax = 0$ 을 보고, 이 방정식이 0이 아닌 해를 갖는지 아닌지를 살펴보자.

부분공간을 생성하는 벡터

이 책에서 처음 살펴본 공간은 열공간이었다. $C(A)$ 는 열벡터 $v_1, \dots, v_n$ 의 모든 선형결합 $x_1v_1 + \dots + x_nv_n$ 을 포함한다. 열공간은 모든 열들의 선형결합 Ax 로 구성된다. ‘생성’이라는 용어는 열공간 $C(A)$ 를 설명한다.

행렬의 열벡터는 열공간을 생성한다. 이 열벡터들은 선형종속일 수 있다.

EX 2 다음 행렬 A 의 열공간과 행공간에 대해 알아보자.

$$m = 3, n = 2 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

행렬 A 의 열공간은 행렬 A 의 두 열로 생성된 $\mathbb{R}^3$ 안의 평면이다. 행렬 A 의 행공간은 행렬 A 의 세 행(행렬 A^T 의 세 열)에 의해 생성된다. 행공간은 $\mathbb{R}^2$ 전체이다.

행들은 행공간을 생성하면서 $\mathbb{R}^n$ 안에 있고, 열들은 열공간을 생성하면서 $\mathbb{R}^m$ 안에 있음을 기억하자.

벡터공간의 기저

두 벡터는 선형독립이라고 해도 $\mathbb{R}^3$ 을 생성할 수 없다. 또 네 벡터는 $\mathbb{R}^3$ 을 생성하더라도 선형독립일 수 없다. 우리는 벡터공간을 생성할 수 있으면서 선형독립인 벡터를 원한다. ‘기저’가 이러한 경우에 딱 맞다.

정의 기저

벡터공간의 기저는 다음 2가지 성질을 만족하는 벡터들의 집합이다.

기저벡터는 선형독립이며, 벡터공간 전체를 생성한다.

이 성질은 선형대수학의 기본이다. 벡터공간의 모든 벡터 v 는 기저벡터들의 선형결합이다. 왜냐하면 기저벡터들은 벡터공간을 생성하기 때문이다. 또한 기저벡터 $v_1, \dots, v_n$ 이 선형독립이므로, 어떤 벡터 v 를 생성하는 선형결합은 유일하다. 즉 다음과 같다.

벡터 v 를 기저벡터의 선형결합으로 나타내는 방법은 유일하다.

위 사실을 증명해보자. $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ 이고 $v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$ 이라 가정하자. 두 식을 빼면 $(a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n$ 은 영벡터이다. $v_1, \dots, v_n$ 이 선형독립이므로, 모든 i 에 대해 $a_i - b_i = 0$ 이 된다. 따라서 모든 i 에 대해 $a_i = b_i$ 가 되므로, 벡터 v 를 생성하는 2가지 방법은 없다.

EX 3 항등행렬 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 열은 $\mathbb{R}^2$ 의 **표준기저**(standard basis)를 생성한다. 기저 벡터 $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 는 선형독립이고 $\mathbb{R}^2$ 을 생성한다. 대부분 $\mathbb{R}^2$ 의 기저로 표준기저를 먼저 생각한다. $n \times n$ 항등행렬의 열은 $\mathbb{R}^n$ 의 ‘표준기저’를 생성한다.

이제 또 다른 기저에 대해 살펴보자. 기저는 유일하지 않다.

EX 4 (중요) 모든 $n \times n$ 가역행렬의 열은 $\mathbb{R}^n$ 의 기저이다.

가역행렬
선형독립인 열
(열공간) = $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

특이행렬
선형종속인 열
(열공간) $\neq \mathbb{R}^3$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$Ax = 0$ 의 유일한 해는 $x = A^{-1}0 = 0$ 이다. 행렬 A 의 열들은 선형독립이다. 또한 행렬 A 의 열들의 선형결합으로 모든 벡터 b 를 생성할 수 있으므로, 행렬 A 의 열들은 $\mathbb{R}^3$ 을 생성한다. $Ax = b$ 의 해는 $x = A^{-1}b$ 로 구할 수 있다. 가역행렬에 대해 모든 사실이 어떻게 연결되는지 보이는가? 이를 한 문장으로 요약하면 다음과 같다.

벡터 $v_1, \dots, v_n$ 이 $n \times n$ 가역행렬의 열이 될 때, $v_1, \dots, v_n$ 은 $\mathbb{R}^n$ 의 기저가 된다. $\mathbb{R}^n$ 은 무수히 많은 기저를 갖는다.

열들이 선형종속일 때 피벗 열만 유지한다. 행렬 B 의 경우, 이는 처음 두 열을 의미한다. 이 두 열은 선형독립이며 열공간을 생성한다.

선형독립인 벡터의 모든 집합은 기저로 확장될 수 있다.
생성하는 벡터의 모든 집합은 기저로 축소될 수 있다.

EX 5 다음 행렬 A 는 가역행렬이 아니다. 이 행렬의 열은 기저가 될 수 없다.

하나의 피벗 열
하나의 피벗 행($r=1$)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 을 축소하면 $R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이다.

EX 6 다음 랭크 2 행렬의 열공간과 행공간에 대한 기저를 구해보자.

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1열과 3열은 피벗 열이다. 이 두 열은 R_0 의 열공간의 기저가 된다. 열공간은 $\mathbb{R}^3$ 의 xyz -공간 내부에 있는 ‘ xy -평면’이다. 이 평면은 $\mathbb{R}^2$ 이 아니고 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간이다. 2열과 3열도 동일한 열공간의 기저가 된다. 그렇다면 열공간의 기저가 되지 않는 R_0 의 열의 쌍은 무엇인가?

행공간은 $\mathbb{R}^4$ 의 부분공간이다. 행공간의 가장 간단한 기저는 R_0 의 영행이 아닌 두 행이다. 영벡터는 절대로 기저에 포함할 수 없다.

Q. $\mathbb{R}^7$ 에서 5개의 벡터가 주어질 때, 이 벡터들이 생성하는 벡터공간의 기저는 어떻게 찾을 수 있을까?

A1. 벡터들을 행렬 A 의 행으로 만들고, 소거를 통해 R 에서 영행이 아닌 행을 찾는다.

A2. 5개의 벡터를 행렬 A 의 열에 넣고, 소거를 통해 피벗 열을 찾는다. C 의 피벗 열은 열공간의 기저가 된다.

기저가 여러 개일 때, 한 기저를 구성하는 벡터가 다른 기저보다 더 많거나 적을 수 있을까? 그렇지 않다. 벡터공간의 모든 기저는 동일한 개수의 벡터를 포함한다.

모든 기저에 있는 벡터의 개수를 벡터공간의 ‘차원’이라 한다.

벡터공간의 차원

다음 사실을 증명해보자. 기저는 여러 가지가 존재할 수 있지만, 다음과 같이 기저 안의 벡터 개수는 변하지 않는다.

$v_1, \dots, v_m$ 과 $w_1, \dots, w_n$ 이 동일한 벡터공간의 기저벡터일 때, $m = n$ 이다.

증명

$w_1, \dots, w_n$ 이 $v_1, \dots, v_m$ 보다 많다고 가정하자. $n > m$ 으로부터 모순을 유도하고자 한다. $v_1, \dots, v_m$ 은 기저벡터이므로, 각 $w_1, \dots, w_n$ 은 $v_1, \dots, v_m$ 의 선형결합이어야 한다. 만약 w_1 이 $a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m$ 이면, w_1 은 다음과 같이 $VA = W$ 의 1열이 된다.

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n] = [v_1 \ \dots \ v_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mn} \end{bmatrix} = VA$$

행렬 A 의 각 성분 a_{ij} 를 알지는 못하지만, 행렬 A 의 형태($m \times n$ 행렬)는 안다. 두 번째 벡터 w_2 도 $v_1, \dots, v_m$ 의 선형결합이다. 이 선형결합의 계수가 행렬 A 의 2열을 채운다. 핵심은 행렬 A 가 모든 벡터 v_i 에 대응하는 행을 갖고, 모든 벡터 w_i 에 대응하는 열을 갖는다는 것이다. $n > m$ 으로 가정했으므로 행렬 A 는 가로가 길고 세로가 짧은 행렬이다. 따라서 $Ax = 0$ 의 0 이 아닌 해가 존재한다.

$Ax = 0$ 에 따라 $VAx = 0$ 이 성립한다. 즉 $Wx = 0$ 이다. $w_1, \dots, w_n$ 의 선형결합이 영벡터를 만든다. 그러면 $w_1, \dots, w_n$ 은 기저벡터가 될 수 없다. 즉 두 기저가 존재한다는 가정에 모순이 발생한다.

$m > n$ 이라 가정하고, v_i 들과 w_i 들을 바꿔서 동일한 과정을 진행하면 다시 모순이 발생한다. 따라서 모순이 발생하지 않으려면 $m = n$ 이어야 한다. ■

기저벡터의 개수는 차원이다. 따라서 $\mathbb{R}^n$ 의 차원은 n 이다. 이제 중요한 용어인 차원을 정의해보자.

정의 차원

벡터공간의 차원은 모든 기저 안에 있는 벡터의 개수이다.

차원은 우리의 직관과 일치한다. 원점과 벡터 $v = (1, 5, 2)$ 를 지나는 직선은 1차원이다. 이 직선은 2차원 공간의 부분공간으로, 벡터 v 하나를 기저벡터로 갖는다. 이 직선과 직교하는 공간은 평면 $x + 5y + 2z = 0$ 이다. 이 평면은 2차원이다. 이 결과를 증명하기 위해, 기저벡터 $(-5, 1, 0)$, $(-2, 0, 1)$ 을 찾았다. 기저가 두 벡터를 포함하므로 2차원이다.

평면 $x + 5y + 2z = 0$ 은 두 자유변수를 갖는 행렬 $A = [1 \ 5 \ 2]$ 의 영공간이다. 기저벡터 $(-5, 1, 0)$, $(-2, 0, 1)$ 은 $Ax = 0$ 의 '특별해'이다. $(n - r)$ 개의 특별해는 항상 영공간의 기저를 제공한다. 영공간의 차원은 $(n - r)$ 이다.

선형대수학에서 사용되는 용어에 대해 참고하면 좋을 내용을 간략히 살펴보자. 절대로 ‘공간의 랭크’, ‘기저의 차원’ ‘행렬의 기저’라는 용어를 사용하지 않는다. 이 용어들은 아무 의미가 없다. ‘행렬의 랭크’는 ‘열공간의 차원’과 같다. 다음 사실을 기억해두자.

$$\begin{array}{ll} \text{행공간의 차원은 } r & \text{열공간의 차원은 } r \\ \text{영공간의 차원은 } n-r & N(A^T) \text{의 차원은 } m-r \end{array}$$

행렬공간과 함수공간의 기저

‘독립’, ‘기저’, ‘차원’이라는 용어는 열벡터에만 국한되지 않는다. 세 행렬 A_1, A_2, A_3 가 선형독립인지 물어볼 수도 있다. 세 행렬이 모두 3×4 행렬일 때, 어떤 선형결합은 영행렬을 생성할 수 있다. 3×4 행렬공간의 차원을 물어볼 수도 있다(차원은 12이다. 즉 모든 기저는 12개의 행렬을 포함한다).

미분방정식 $\frac{d^2 y}{dx^2} = y$ 는 해공간을 갖는다. 이 공간에 대한 한 기저는 $y = e^x$ 와 $y = e^{-x}$ 로 구성된다. 기저함수를 세어보면 이 해공간의 차원이 2임을 알 수 있다(2차원인 이유는 선형방정식이 2계도함수로 시작하기 때문이다).

행렬공간에 대해 알아보자. 벡터공간 M 은 모든 2×2 행렬을 포함한다. 이 공간의 차원은 4이다.

$$\text{하나의 기저} \quad A_1, A_2, A_3, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

위 행렬들은 선형독립이다. 여기서는 이 행렬들의 열을 보는 것이 아니라 전체 행렬을 본다. 이 4가지 행렬의 선형결합은 다음과 같이 행렬공간 M 에 있는 모든 행렬을 생성할 수 있다.

$$\text{모든 행렬 } A \text{ 는 기저행렬들의 선형결합} \quad c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = A$$

c_i 가 모두 0일 때만 A 가 영행렬이다. 이 사실은 행렬 A_1, A_2, A_3, A_4 가 선형독립임을 증명한다.

세 행렬 A_1, A_2, A_4 는 상삼각행렬로만 이루어진 부분공간의 기저를 형성한다. 이 부분공간의 차원은 3이다. 또 두 행렬 A_1, A_4 는 대각행렬로만 이루어진 부분공간의 기저를 형성한다. 그렇다면 대칭행렬로만 이루어진 부분공간의 기저는 무엇인가? 두 행렬 A_1, A_4 는 유지하고 $A_2 + A_3$ 를 포함하면 된다.

- 전체 $n \times n$ 행렬공간의 차원은 n^2 이다.
- 상삼각행렬만 포함하는 부분공간의 차원은 $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ 이다.
- 대각행렬만 포함하는 부분공간의 차원은 n 이다.
- 대칭행렬만 포함하는 부분공간의 차원은 $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ 이다(그이유는?).

이제 **함수공간**에 대해 알아보자. 미분방정식 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$, $\frac{d^2y}{dx^2} = y$ 는 2계도함수를 포함한다. 미분적분학에서는 미분방정식을 풀기 위해 다음과 같이 함수 $y(x)$ 를 구한다.

$y'' = 0$ 의 해는 임의의 선형함수 $y = cx + d$ 이다.

$y'' = -y$ 의 해는 임의의 선형결합 $y = c \sin x + d \cos x$ 이다.

$y'' = y$ 의 해는 임의의 선형결합 $y = ce^x + de^{-x}$ 이다.

$y'' = -y$ 의 해공간에는 두 기저함수 $\sin x$, $\cos x$ 가 있다. $y'' = 0$ 의 해공간에는 두 기저함수 x , 1 이 있다. 이는 2계도함수의 '영공간'이다. 각 공간의 차원은 모두 2이다(이들은 모두 2계 미분방정식이다).

$y'' = 2$ 의 해는 부분공간을 형성하지 않는다. 우변의 $b = 2$ 가 0이 아니기 때문이다. $y'' = 2$ 의 특수해는 $y(x) = x^2$ 이다. $y'' = 2$ 의 완전해는 $y(x) = x^2 + cx + d$ 이다. 완전해는 특수해 x^2 과 영공간에 대한 해 $cx + d$ 의 합이다. 선형 미분방정식은 선형 행렬방정식 $Ax = b$ 와 같다.

끝으로 영벡터만 포함하는 공간 Z 에 대해 알아보자. 이 공간의 차원은 0이다. 공집합이 공간 Z 의 기저가 된다. 영벡터를 기저벡터로 허용하면 선형독립성이 사라지므로, 영벡터는 절대로 기저 안에 포함하면 안 된다.

이 절의 주요 용어인 독립, 생성, 기저, 차원을 다시 정리해보자.

- ① $Ax = 0$ 의 유일한 해가 $x = 0$ 이면 행렬 A 의 열들은 선형독립이다.
- ② $v_1, \dots, v_r$ 의 선형결합이 벡터공간을 채우면, 이 벡터들이 벡터공간을 생성한다.
- ③ 기저는 선형독립인 벡터들로 구성되며 벡터공간을 생성한다. 벡터공간의 모든 벡터는 기저 벡터들의 유일한 선형결합으로 표현된다.
- ④ 벡터공간의 모든 기저는 동일한 개수의 벡터를 갖는다. 기저 안에 있는 벡터의 개수를 벡터 공간의 차원이라 한다.
- ⑤ 피벗 열은 열공간의 한 기저를 형성한다. 열공간 $C(A)$ 의 차원은 r 이다.

3.4 확인문제

3.4A (중요한 문제) $v_1, \dots, v_n$ 이 $\mathbb{R}^n$ 의 기저이고 $n \times n$ 행렬 A 가 가역행렬이라 하자. 이때 $Av_1, \dots, Av_n$ 도 $\mathbb{R}^n$ 의 기저임을 보여라.

풀이

먼저 행렬 용어로 증명해보자. 기저벡터 $v_1, \dots, v_n$ 을 가역행렬 V 의 열로 구성한다. 그러면 $Av_1, \dots, Av_n$ 은 AV 의 열이다. A 가 가역행렬이므로 AV 도 가역행렬이다. 따라서 AV 의 열들도 기저를 형성한다.

이번에는 벡터 용어로 증명해보자. $c_1Av_1 + \dots + c_nAv_n = \mathbf{0}$ 이라 하자. $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$ 이라 하면 $Av = \mathbf{0}$ 이다. 이 식의 양변에 A^{-1} 를 곱하면 $v = \mathbf{0}$ 이다. $v_1, \dots, v_n$ 이 선형독립이므로 모든 $c_i = 0$ 이다. 따라서 $Av_1, \dots, Av_n$ 은 선형독립이다.

$Av_1, \dots, Av_n$ 이 $\mathbb{R}^n$ 을 생성한다는 사실을 보이기 위해서는, $\mathbb{R}^n$ 의 임의의 벡터 b 를 $c_1Av_1 + \dots + c_nAv_n = b$ 와 같이 나타내는 c_i 값들이 존재해야 한다. 이 식의 양변에 A^{-1} 를 곱하면 $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = A^{-1}b$ 가 된다. $v_1, \dots, v_n$ 이 $\mathbb{R}^n$ 의 기저이므로, $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = A^{-1}b$ 를 만족하는 c_i 값들이 존재한다.

3.4B 두 벡터 $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (2, 3, 0)$ 에 대해 다음 물음에 답하라.

- 두 벡터가 선형독립인가?
- 두 벡터가 어떤 벡터공간 V 의 기저를 형성하는가?
- V 의 차원은 무엇인가?
- 어떤 행렬 A 의 열공간이 V 인가?
- 어떤 행렬 B 의 영공간이 V 인가?
- v_1, v_2, v_3 가 $\mathbb{R}^3$ 의 기저를 형성하도록 하는 벡터 v_3 에 대해 설명하라.

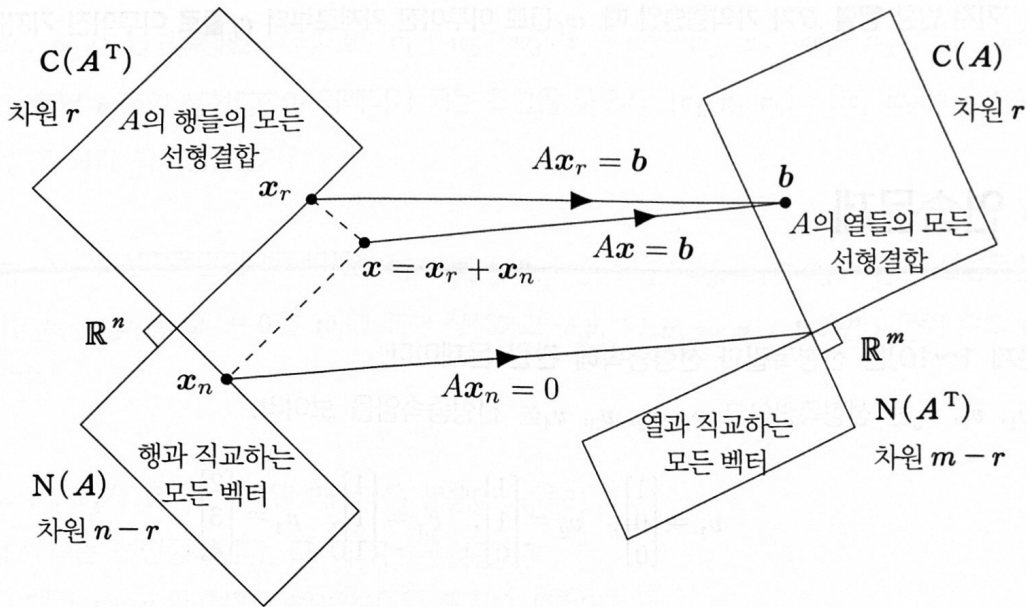
풀이

- v_1, v_2 는 선형독립이다. 왜냐하면 $\mathbf{0}$ 을 생성하는 유일한 선형결합이 $0v_1 + 0v_2$ 이기 때문이다.
- v_1, v_2 는 이 두 벡터가 생성하는 벡터공간 V 의 기저를 형성한다. V 는 벡터 $(x, y, 0)$ 들의 집합이다.
- 기저에 두 벡터가 포함되므로 V 의 차원은 2이다.
- V 는 랭크가 2이며 모든 열이 v_1, v_2 의 선형결합인 $3 \times n$ 행렬 A 의 열공간이다. 단순히 v_1, v_2 를 열로 갖는 3×2 행렬 A 를 선택해도 된다.

(e) 모든 행이 $(0, 0, 1)$ 의 상수배인 $m \times 3$ 크기의 랭크 1 행렬 B 의 영공간은 V 이다. 단순히 $B = [0 \ 0 \ 1]$ 로 선택해도 된다. 그러면 $Bv_1 = 0$, $Bv_2 = 0$ 이다.

(f) 임의의 벡터 $v_3 = (a, b, c)$ 가 $c \neq 0$ 를 만족하면 v_1, v_2, v_3 는 $\mathbb{R}^3$ 의 기저를 형성한다.

[그림 3.3]은 지금까지 살펴본 내용을 한눈에 확인할 수 있도록 정리한 것이다.



[그림 3.3] $Ax_r = b$ 는 행렬 A 의 열공간 안에 있고, $Ax_n = 0$ 이다. $Ax = b$ 의 완전해는 $x = (\text{하나의 } x_r) + (\text{임의의 } x_n)$ 이다.

3.4C (기저 변환) 선형독립인 벡터 w_1, w_2, w_3 로 시작하자. 세 벡터의 선형결합으로 v_1, v_2, v_3 를 생성한다. 선형결합은 다음과 같이 행렬 형식 $V = WB$ 로 작성한다.

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1 + w_2 \\ v_2 &= w_1 + 2w_2 + w_3 \\ v_3 &= w_2 + cw_3 \end{aligned} \quad [v_1 \ v_2 \ v_3] = [w_1 \ w_2 \ w_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$V = WB$ 의 열들이 선형독립인지 보이기 위해 행렬 B 에 대해 무엇을 확인해야 하는가? $c \neq 10$ 이면 v_1, v_2, v_3 가 선형독립임을 보여라. 또 $c = 10$ 이면 v_1, v_2, v_3 가 선형종속임을 보여라.

풀이

열들이 선형독립인 경우, 행렬 V 의 영공간은 영벡터만 포함해야 한다. 즉 $Vx = 0$ 일 때 $x = (0, 0, 0)$ 이어야 한다.

$c = 10$ 이면 2가지 방식으로 선형종속임을 볼 수 있다. 먼저 $v_1 + v_3$ 는 v_2 와 동일하다. 그러면 $v_1 - v_2 + v_3 = 0$ 이므로 v_1, v_2, v_3 가 선형종속이다.

다른 방법은 행렬 B 의 영공간을 이용하는 것이다. 만약 $c=1$ 이면 벡터 $x=(1, -1, 1)$ 은 $Bx=0$ 을 만족하므로, 행렬 B 의 영공간 안에 있다. 그러면 $WBx=0$ 이므로 $Vx=0$ 이다. 따라서 $v_1 - v_2 + v_3 = 0$ 이 되므로 v_1, v_2, v_3 가 선형종속이다. 만약 $c \neq 1$ 이면 B 는 가역행렬이다.

일반적인 규칙은 'B가 가역행렬일 때, 선형독립인 벡터 w_i 들로부터 선형독립인 벡터 v_i 들이 나온다'는 것이다. 만약 이 벡터들이 $\mathbb{R}^3$ 에 있다면, 이 벡터들은 선형독립일 뿐만 아니라 기저를 이룬다.

'기저 변환 행렬 B 가 가역행렬일 때, w_i 들로 이루어진 기저로부터 v_i 들로 이루어진 기저를 얻는다.'

3.4 연습문제

※ [문제 1~10]은 선형독립과 선형종속에 관한 문제이다.

1. v_1, v_2, v_3 는 선형독립이고 v_1, v_2, v_3, v_4 는 선형종속임을 보여라.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = 0$ 또는 $Ax=0$ 을 풀어서 해를 구하라(v_i 들은 행렬 A 의 열에 있다).

2. (꼭 풀어볼 만한 문제) 다음 벡터들 중 선형독립인 벡터를 최대한 많이 찾으라.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. $a=0$ 또는 $d=0$ 또는 $f=0$ 일 때, 각 경우에 대해 행렬 U 의 열이 선형종속임을 증명하라.

$$U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

4. [문제 3]에서 a, d, f 가 모두 0이 아닌 경우, $Ux=0$ 의 유일한 해는 $x=0$ 임을 보여라. 모든 주대각성분이 0이 아닌 상삼각행렬 U 는 선형독립인 열을 갖는다.
5. 다음 벡터가 선형종속인지, 선형독립인지 판단하라.
- (a) $(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)$
- (b) $(1, -3, 2), (2, 1, -3), (-3, 2, 1)$

6. 행렬 U 에서 선형독립인 열 3개를 선택하라. 또 다른 조합으로 두 번 더 선형독립인 열 3개를 선택하라. 행렬 A 에 대해서도 동일하게 진행하라.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

7. w_1, w_2, w_3 가 선형독립인 벡터이면, $v_1 = w_2 - w_3, v_2 = w_1 - w_3, v_3 = w_1 - w_2$ 가 선형종속임을 보여라. 벡터 v_i 들의 선형결합이 영벡터가 되는 조합을 찾으라. $[v_1 \ v_2 \ v_3] = [w_1 \ w_2 \ w_3]A$ 를 만족하는 행렬 A 가 특이행렬인가?
8. w_1, w_2, w_3 가 선형독립인 벡터이면, $v_1 = w_2 + w_3, v_2 = w_1 + w_3, v_3 = w_1 + w_2$ 가 선형독립임을 보여라($c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ 을 w_i 에 대해 작성하고, $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ 이면 c_i 들이 모두 0임을 증명하라).
9. v_1, v_2, v_3, v_4 가 $\mathbb{R}^3$ 의 벡터일 때, 다음 물음에 답하라.
 (a) 네 벡터는 선형종속이다. 그 이유는 무엇인가?
 (b) 두 벡터 v_1, v_2 가 선형종속이기 위한 조건은 무엇인가?
 (c) 벡터 v_1 과 $(0, 0, 0)$ 은 선형종속이다. 그 이유는 무엇인가?
10. $\mathbb{R}^4$ 안의 평면 $x + 2y - 3z - t = 0$ 위에서 선형독립인 두 벡터를 찾으라. 그런 다음 선형독립인 세 벡터를 찾으라. 네 벡터가 선형독립인 경우는 왜 불가능한가? 이 평면은 어떤 행렬의 영공간인가?

※ [문제 11~14]는 벡터의 집합이 생성하는 공간에 관한 문제이다. 벡터의 모든 선형결합을 구하자.

11. 다음 벡터들이 생성하는 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간에 대해 설명하라(예를 들어 직선인지, 평면인지, $\mathbb{R}^3$ 자체인지를 보인다).
 (a) 두 벡터 $(1, 1, -1), (-1, -1, 1)$
 (b) 세 벡터 $(0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 0)$
 (c) $\mathbb{R}^3$ 의 모든 벡터
 (d) 성분이 모두 양수인 모든 벡터
12. 어떤 방정식의 해가 존재할 때, 벡터 b 가 행렬 A 의 열로 생성되는 부분공간에 존재하는가? 또 어떤 방정식의 해가 존재할 때, 벡터 c 가 행렬 A 의 행공간 안에 존재하는가? '만약 영벡터가 행공간 안에 있다면, 행들은 선형종속이다.'라는 명제의 참 또는 거짓을 판정하라.

13. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 에 대해 다음 4가지 공간의 차원을 구하라. 이들 중 동일한 두

공간은 무엇인가?

- (a) A 의 열공간 (b) U 의 열공간 (c) A 의 행공간 (d) U 의 행공간

14. $v+w$ 와 $v-w$ 는 두 벡터 v 와 w 의 선형결합이다. v 와 w 를 $v+w$ 와 $v-w$ 의 선형결합으로 나타내라. 이렇게 구한 두 벡터의 쌍은 동일한 공간을 _____한다. 두 벡터의 쌍이 언제 동일한 공간의 기저를 형성하는가?

※ [문제 15~25]는 기저가 되기 위한 조건에 관한 문제이다.

15. 벡터 $v_1, \dots, v_n$ 이 선형독립이면 이 벡터들이 생성하는 공간의 차원은 무엇인가? 이 벡터들은 해당 공간에 대한 _____이다. 이 벡터들이 $m \times n$ 행렬의 열벡터인 경우, m 은 n 보다 크가, 작은가? 만약 $m = n$ 이면 이 행렬은 _____이다.

16. 다음과 같은 $\mathbb{R}^4$ 의 부분공간의 기저를 구하라.

- (a) 모든 성분이 동일한 모든 벡터들의 집합
(b) 모든 성분의 합이 0이 되는 모든 벡터들의 집합
(c) $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 1)$ 과 직교하는 모든 벡터들의 집합
(d) 4×4 항등행렬 I 의 열공간과 영공간

17. 행렬 $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 열공간에 대한 서로 다른 세 기저를 구하라. 그다음 행렬 U 의 행공간에 대한 서로 다른 두 기저를 구하라.

18. $\mathbb{R}^4$ 의 6개 벡터 $v_1, v_2, \dots, v_6$ 에 대해 다음 중 옳은 것을 골라라.

- (a) 이 벡터들은 $\mathbb{R}^4$ 을 생성[한다 / 하지 않는다 / 하지 않을 수도 있다].
(b) 이 벡터들은 선형독립[이다 / 이 아니다 / 일 수도 있다].
(c) 이 벡터들 중 4개는 $\mathbb{R}^4$ 의 기저벡터가 [된다 / 되지 않는다 / 될 수도 있다].

19. 행렬 A 의 열벡터는 $\mathbb{R}^m$ 의 n 개 벡터이다. 이 벡터들이 선형독립이면, 행렬 A 의 랭크는 무엇인가? 또 이 벡터들이 $\mathbb{R}^m$ 을 생성한다면, 행렬 A 의 랭크는 무엇인가? 만약 이 벡터들이 $\mathbb{R}^m$ 의 기저를 형성한다면, 행렬 A 의 랭크는 무엇인가? 랭크는 _____인 열의 개수를 세는 것이다.

20. $\mathbb{R}^3$ 안의 평면 $x - 2y + 3z = 0$ 에 대한 기저를 구하라. 그다음 해당 평면과 xy -평면이 교차하는 직선에 대한 기저를 구하라. 그리고 평면 $x - 2y + 3z = 0$ 과 직교하는 모든 벡터에 대한 기저를 구하라.

21. 5×5 행렬 A 의 열이 $\mathbb{R}^5$ 의 기저를 형성한다고 가정할 때, 다음 물음에 답하라.
- (a) 방정식 $Ax = 0$ 의 해는 오직 $x = 0$ 뿐이다. 그 이유는 무엇인가?
- (b) 만약 벡터 b 가 $\mathbb{R}^5$ 안에 있다면, 방정식 $Ax = b$ 의 해가 존재한다. 왜냐하면 기저벡터들은 $\mathbb{R}^5$ 을 _____하기 때문이다. 결론적으로 행렬 A 는 가역행렬이고, 행렬 A 의 랭크는 5이다. 또 행렬 A 의 행들도 $\mathbb{R}^5$ 의 기저를 형성한다.

22. S 를 $\mathbb{R}^6$ 의 5차원 부분공간이라 가정하자. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라(거짓이면 반례를 찾으라).
- (a) S 의 모든 기저는 벡터를 하나 더 추가하면 $\mathbb{R}^6$ 의 기저로 확장할 수 있다.
- (b) $\mathbb{R}^6$ 의 모든 기저에서 하나의 벡터를 제거하면 S 의 기저가 될 수 있다.

23. 행렬 U 는 행렬 A 의 3행에서 1행을 뺀으로써 얻을 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

두 행렬의 열공간의 기저를 구하라. 두 행렬의 행공간의 기저도 구하라. 또 두 행렬의 영공간의 기저를 구하라. 소거할 때 변하지 않는 공간은 무엇인가?

24. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라(답에 대한 충분한 이유를 제시하라).

- (a) 행렬의 열이 선형종속이면 행도 선형종속이다.
- (b) 2×2 행렬의 열공간은 행공간과 동일하다.
- (c) 2×2 행렬의 열공간은 행공간과 동일한 차원을 갖는다.
- (d) 행렬의 열은 열공간의 기저를 형성한다.

25. 벡터 $v_1, \dots, v_k$ 가 $\mathbb{R}^n$ 을 생성한다고 가정하자. 이 벡터들의 집합을 어떻게 기저로 줄일 수 있는가? $\mathbb{R}^n$ 에서 벡터 $v_1, \dots, v_j$ 가 선형독립이라고 가정하자. 기저를 형성하려면 주어진 벡터에 어떤 벡터를 추가해야 하는가?

26. 다음 행렬은 각각 어떤 수 c, d 에 대해 랭크 2를 갖는가?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & d & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$$

※ [문제 27~31]은 '벡터'가 행렬인 공간에 관한 문제이다.

27. 다음 3×3 행렬로 이루어진 부분공간의 기저와 차원을 각각 구하라.
- (a) 모든 대각행렬
 - (b) 모든 대칭행렬($A^T = A$)
 - (c) 모든 반대칭행렬($A^T = -A$)
28. 6개의 선형독립인 3×3 사다리꼴 행렬 $U_1, \dots, U_6$ 를 만들어라.
29. 모든 열을 더하면 영벡터가 되는 2×3 행렬 전체로 이루어진 공간의 기저를 구하라. 또 모든 행을 더하면 영벡터가 되는 2×3 행렬 전체로 이루어진 공간의 기저를 구하라.
30. 3×3 행렬의 어떤 부분공간이 각각 다음 행렬들에 의해 생성되는가?
- (a) 가역행렬
 - (b) 랭크 1 행렬
 - (c) 항등행렬
31. 영공간이 $(2, 1, 1)$ 을 포함하는 2×3 행렬 전체로 이루어진 공간의 기저를 구하라.

※ [문제 32~36]은 '벡터'가 함수인 공간에 관한 문제이다.

32. 다음 물음에 답하라.
- (a) $\frac{dy}{dx} = 0$ 을 만족하는 모든 함수를 구하라.
 - (b) $\frac{dy}{dx} = 3$ 을 만족하는 함수를 하나만 구하라.
 - (c) $\frac{dy}{dx} = 3$ 을 만족하는 모든 함수를 구하라.
33. 함수공간 F_3 는 모든 선형결합 $y(x) = A\cos x + B\cos 2x + C\cos 3x$ 를 포함한다. $y(0) = 0$ 인 함수로 이루어진 부분공간의 기저를 구하라.
34. 다음을 만족하는 함수공간의 기저를 구하라.
- (a) $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$
 - (b) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$
35. $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 는 서로 다른 세 함수이다. 이 함수들이 생성하는 공간의 차원은 1, 2, 3 중 하나일 수 있다. 각 경우에 대한 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 의 예를 제시하라.
36. 3차 이하인 다항식 $p(x)$ 에 대한 다항식공간의 기저를 구하라. 또 $p(1) = 0$ 인 다항식으로 이루어진 부분공간의 기저를 구하라.

37. $a+c+d=0$ 인 벡터 (a, b, c, d) 로 이루어진 벡터공간 S 의 기저를 구하라. 또 $a+b=0, c=2d$ 인 벡터 (a, b, c, d) 로 이루어진 벡터공간 T 의 기저를 구하라. $S \cap T$ 의 차원은 무엇인가?
38. A 는 랭크가 4인 5×4 행렬이다. 5×5 행렬 $[A \ b]$ 가 가역행렬일 때, $Ax=b$ 의 해가 존재하지 않음을 보여라. 그리고 $[A \ b]$ 가 특이행렬이면 $Ax=b$ 의 해가 존재함을 보여라.
39. $\frac{d^2y}{dx^2}=y(x)$ 의 모든 해에 대한 기저를 구하라. 또 $\frac{d^2y}{dx^2}=-y(x)$ 의 모든 해에 대한 기저를 구하라.

도전문제

40. 서로 다른 5가지 치환행렬의 선형결합으로 3×3 항등행렬을 나타내라. 그런 다음 이 5가지 행렬이 선형독립임을 보여라. 이 5가지 행렬은 행과 열의 합이 동일한 3×3 행렬에 대한 부분공간의 기저를 형성한다.
41. $\mathbb{R}^4$ 에서 $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 를 선택한다. 이 경우 $(x_2, x_1, x_3, x_4), (x_4, x_3, x_1, x_2)$ 와 같은 재배열이 24개 있다. 자기 자신 x 를 포함한 24개의 벡터들은 부분공간 S 를 생성한다. S 의 차원이 다음과 같도록 하는 벡터 x 를 각각 구하라.
- (a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) 4
42. $\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \cap W) + \dim(V + W)$ 이다. 이때 $V + W = \{v+w \mid v \in V, w \in W\}$ 이다. $V \cap W$ 의 기저벡터 $u_1, \dots, u_r$ 로 시작한다. $u_1, \dots, u_r$ 에 $v_1, \dots, v_s$ 를 추가하여 V 의 기저를 만든다. 또한 별도로 $u_1, \dots, u_r$ 에 $w_1, \dots, w_t$ 를 추가하여 W 의 기저를 만든다. 벡터 u_i, v_i, w_i 들을 모아서 이 벡터들이 선형독립임을 증명하라. 참고로 차원은 $(r+s) + (r+t) = (r) + (r+s+t)$ 이다.
43. $\mathbb{R}^n$ 에서 $\dim(V) + \dim(W) > n$ 이라 가정하자. 영벡터가 아닌 어떤 벡터가 V 와 W 모두에 존재함을 보여라.
- 힌트** V 의 기저와 W 의 기저를 행렬 A 의 열에 넣고 $Ax=0$ 을 푼다.
44. A 는 10×10 행렬이고 $A^2=0$ (영행렬)이다. 따라서 행렬 A 를 A 의 각 열에 곱하면 영벡터를 얻는다. 그러면 행렬 A 의 열공간은 _____에 포함된다. 행렬 A 의 랭크가 r 이면, 행렬 A 의 열공간의 차원 r 은 $r \leq 10-r$ 을 만족한다. 따라서 랭크는 $r \leq 5$ 이다.

3.5 4가지 기본 부분공간의 차원

1. 열공간 $C(A)$ 와 행공간 $C(A^T)$ 의 차원은 모두 r (A 의 랭크)이다.
2. 영공간 $N(A)$ 의 차원은 $(n-r)$ 이다. 또한 좌영공간(left null space) $N(A^T)$ 의 차원은 $(m-r)$ 이다.
3. A 에서 R_0 로의 소거는 $C(A)$ 와 $N(A^T)$ 를 변화시킨다(그러나 이들의 차원은 변하지 않는다).

이 장의 주요 정리는 랭크와 차원을 연결한다. 행렬의 랭크는 선형독립인 열의 개수이다. 부분공간의 차원은 기저에 있는 벡터의 개수이다. 피벗이나 기저벡터는 셀 수 있다. 행렬 A 의 랭크는 4가지 기본 부분공간의 차원을 모두 나타낸다. 다음은 4가지 기본 부분공간이다. 이들 중 두 부분공간은 행렬 A 로부터 직접 얻고, 나머지 두 부분공간은 A^T 로부터 얻는다.

4가지 기본 부분공간	차원
❶ 행공간 $C(A^T)$ 는 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간이다.	r
❷ 열공간 $C(A)$ 는 $\mathbb{R}^m$ 의 부분공간이다.	r
❸ 영공간 $N(A)$ 는 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간이다.	$n-r$
❹ 좌영공간 $N(A^T)$ 는 $\mathbb{R}^m$ 의 부분공간이다.	$m-r$

$C(A)$ 와 $N(A)$ 는 이미 잘 알고 있다. 여기서는 $C(A^T)$ 와 $N(A^T)$ 가 새롭게 등장한다. 행공간 $C(A^T)$ 는 모든 행의 선형결합을 포함한다. 행공간 $C(A^T)$ 는 A^T 의 열공간이다.

좌영공간은 $A^T y = 0$ 의 해들의 집합이다. 이 연립방정식의 크기는 $n \times m$ 이다. 뒤에서 살펴볼 [EX 2]에서 이 식은 응용수학의 위대한 방정식 중 하나인 **키르히호프의 전류 법칙**과 연결된다. 전류는 네트워크를 중심으로 흐르며 노드에 쌓일 수 없다. 행렬 A 는 그래프의 **결합행렬**(incidence matrix)이다. 4가지 기본 부분공간은 노드(node), 에지(edge), 루프(loop), 트리(tree)에서 등장한다. 이 부분공간들은 정말 아름답게 연결된다.

[선형대수학의 기본정리 1]에서는 4가지 기본 부분공간의 차원을 찾을 것이다. 하나 주목할만한 사실은 ‘행공간과 열공간이 동일한 차원 r 을 갖는다’는 것이다. 여기서 r 은 행렬 A 의 랭크이다. 다른 중요한 사실은 두 영공간에 관한 것으로 다음과 같다.

‘ $N(A)$ 와 $N(A^T)$ 의 차원은 각각 $(n-r)$ 과 $(m-r)$ 이고, 이들은 전체 n 과 m 을 채운다.’

[선형대수학의 기본정리 2]에서는 4가지 기본 부분공간이 어떻게 결합되는지에 대해 설명할 것이다. 행공간과 직교하는 영공간과 $C(A)$ 와 직교하는 $N(A^T)$ 가 있다. 이 결과는 $Ax = b$ 를 이해하는 ‘정확한 방법’을 완성한다.

R_0 의 4가지 기본 부분공간

행렬 A 가 기약행 사다리꼴 R_0 로 축소되었다고 가정하자. 이 경우에는 4가지 기본 부분공간을 쉽게 확인할 수 있다. 각 부분공간에 대한 기저를 찾고 그 차원을 확인할 것이다. 그런 다음 부분공간이 소거에 따라 어떻게 변하는지 살펴본다(부분공간들 중 2개는 변하지 않는다). 요점은 A 와 R_0 에 대해 4가지 기본 부분공간의 차원이 모두 각각 동일하다는 것이다.

그러나 A 와 R 의 경우에는 4가지 기본 부분공간 중 하나의 차원은 다를 수 있다. 왜냐하면 R 에서 영행이 제거됨에 따라 m 이 바뀌기 때문이다.

구체적인 3×5 행렬의 예를 통해 기약행 사다리꼴 행렬 R_0 의 4가지 기본 부분공간을 살펴보자.

$$\begin{array}{l} m = 3 \\ n = 5 \\ r = 2 \end{array} \quad R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{피벗 행 1행, 2행} \\ \text{피벗 열 1열, 4열} \end{array}$$

행렬 R_0 의 랭크는 $r = 2$ (2개의 피벗)이다. 이제 4가지 기본 부분공간을 순서대로 살펴보자.

① R_0 의 행공간의 차원은 2이다(랭크와 일치).

이유를 확인해보자. 행렬 R_0 의 처음 두 행은 기저를 형성한다. 행공간은 세 행의 모든 선형결합을 포함하지만, 3행(영행)은 행공간에 아무것도 추가하지 않는다.

피벗 행 1행과 2행은 선형독립이다. 피벗 열만 보면 $r \times r$ 항등행렬을 볼 수 있다. 모든 계수가 0인 경우를 제외하고는, 영행을 만드는 행들의 선형결합을 찾을 수 없다. 따라서 r 개의 피벗 행(R 의 행)은 행공간의 기저를 형성한다. 즉 행공간의 차원은 랭크 r 이다. R_0 의 영행이 아닌 행들은 행공간의 기저를 형성한다.

② R_0 의 열공간의 차원은 $r = 2$ 이다.

이유를 확인해보자. 피벗 열 1열과 4열은 열공간의 기저를 형성한다. 이들은 $r \times r$ 항등행렬을 포함하므로 선형독립이다. (모든 계수가 0인 선형결합을 제외하고는) 피벗 열의 어떤 선형결합도

0으로만 이루어진 영열을 만들 수 없다. 그리고 피벗 열은 열공간을 생성한다. 다른 모든 (자유) 열은 피벗 열의 선형결합이다. 사실 필요한 선형결합은 다음과 같은 3가지 특별해이다.

(2열)은 $3 \times (1열)$ 이다. 이때 특별해는 $(-3, 1, 0, 0, 0)$ 이다.

(3열)은 $5 \times (1열)$ 이다. 이때 특별해는 $(-5, 0, 1, 0, 0)$ 이다.

(5열)은 $7 \times (1열) + 2 \times (4열)$ 이다. 이때 특별해는 $(-7, 0, 0, -2, 1)$ 이다.

피벗 열은 선형독립이며 $C(R_0)$ 를 생성한다. 따라서 피벗 열들이 $C(R_0)$ 의 기저를 형성한다. 즉 열공간의 차원은 랭크 r 이다. 피벗 열은 기저를 형성한다.

③ R_0 의 영공간의 차원은 $n - r = 5 - 2$ 이다. 3개의 자유변수는 $R_0x = 0$ 에 대한 3개의 특별해를 제공한다. 자유변수는 1, 0, 0으로 설정한다.

$$s_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_5 = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_0x = 0 \text{의 완전해는} \\ x = x_2s_2 + x_3s_3 + x_5s_5 \\ R_0 \text{의 영공간의 차원은 } 3 \end{array}$$

이유를 확인해보자. 각 자유변수에 대해 특별해가 존재한다. n 개의 변수와 r 개의 피벗이 있으므로, $(n - r)$ 개의 자유변수와 특별해가 있다. $R_0x = 0$ 의 특별해는 선형독립이다. 왜냐하면 2행, 3행, 5행에서 항등행렬을 볼 수 있기 때문이다. 즉 영공간 $N(A)$ 의 차원은 $n - r$ 이다. $R_0x = 0$ 의 특별해는 기저를 형성한다.

④ R_0^T 의 영공간(R_0 의 좌영공간)의 차원은 $m - r = 3 - 2$ 이다.

이유를 확인해보자. R_0 는 r 개의 선형독립인 행과 $(m - r)$ 개의 영행을 갖는다. 그러면 R_0^T 는 r 개의 선형독립인 열과 $(m - r)$ 개의 영열을 갖는다. 따라서 R_0^T 의 영공간에 있는 벡터 y 는 마지막 $(m - r)$ 개의 성분에 0이 아닌 값을 가질 수 있다. 여기서는 R_0^T 안에 $(m - r) = 1$ 개의 영열이 있고, y 에 0이 아닌 성분이 1개 있다.

$$R_0^T y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{의 완전해는 } y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{이다.} \quad (1)$$

R_0 에 영행이 있고 R_0^T 에 영열이 있으므로, 이 네 번째 기본 부분공간의 차원과 기저를 쉽게 확인할 수 있다. R_0 가 $(m-r)$ 개의 영행을 가지면, R_0 의 좌영공간의 차원은 $(m-r)$ 이다.

왜 ‘좌영공간’이라고 할까? 그 이유는 $R_0^T y = 0$ 을 $y^T R_0 = 0^T$ 로 전치할 수 있기 때문이다. 이제 y^T 는 R 의 ‘왼쪽’에 있는 행벡터이다. 네 번째로 설명한 이 부분공간은 일부 선형대수학 책의 경우 생략하기도 한다. 그러나 이를 생략한다면 선형대수학 전체 주제에 대한 아름다움을 탐색할 기회를 놓치게 될 것이다.

$\mathbb{R}^n$ 에서 행공간과 영공간의 차원은 각각 r , $n-r$ 이다(둘을 더하면 n).

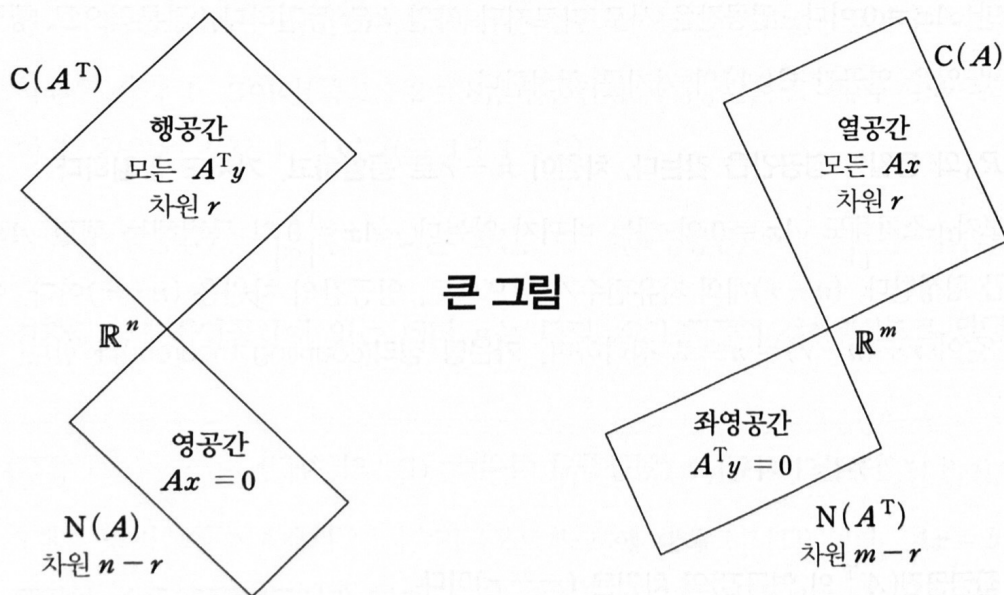
$\mathbb{R}^m$ 에서 열공간과 좌영공간의 차원은 각각 r , $m-r$ 이다(둘을 더하면 m).

아직 해야 할 일이 남아 있다. 행렬 A 의 4가지 기본 부분공간에 대한 차원은 R_0 와 동일하다. 그 이유를 알아보자. 행렬 A 는 다음과 같이 $R_0 = \text{rref}(A)$ 로 축소되는 행렬이다.

$$A \text{는 } R_0 \text{로 축소} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

행렬 A 의 행공간은 R_0 의 행공간과 같다. 그러나 열공간은 서로 다르다. 하지만 열공간의 차원은 같다.

[그림 3.4]는 지금까지 살펴본 내용을 정리한 것이다.



[그림 3.4] R_0 와 A 의 4가지 기본 부분공간의 차원

A의 4가지 기본 부분공간

❶ 행렬 A 는 R_0 , R 과 동일한 행공간을 갖는다. 차원 r 과 기저도 모두 동일하다.

이유를 확인해보자. 행렬 A 의 모든 행은 R_0 의 행들의 선형결합이다. 또한 R_0 의 모든 행은 행렬 A 의 행들의 선형결합이다. 소거는 행을 바꾸지만 행공간을 바꾸지는 않는다.

행렬 A 의 행공간이 R_0 의 행공간과 동일하므로, R_0 의 처음 r 개의 행은 여전히 기저를 형성한다. 또는 행렬 A 의 적절한 r 개의 행을 선택할 수도 있다. 항상 행렬 A 의 처음 r 개의 행인 것은 아니다. 왜냐하면 그 행들이 선형종속일 수 있기 때문이다. 행렬 A 의 적절한 r 개의 행은 R_0 와 R 에서 피벗 행이 있는 행이다.

❷ 행렬 A 의 열공간의 차원은 r 이다. 열 랭크는 행 랭크와 동일하다.

$$(\text{선형독립인 열의 개수}) = (\text{선형독립인 행의 개수})$$

우선 흔히 잘못 생각할 수 있는 틀린 이유를 먼저 알아보자. ‘행렬 A 와 R_0 는 동일한 열공간을 갖는다’는 문장은 거짓이다. 왜냐하면 R_0 의 열은 종종 0으로 끝나지만, 행렬 A 의 열은 종종 0으로 끝나지 않기 때문이다. 그렇다면 $C(A)$ 는 $C(R_0)$ 가 아니다.

이제 올바른 이유를 확인해보자. 행렬 A 와 R_0 에서 열들의 동일한 선형결합은 0이다(또는 0이 아니다). A 에서 선형종속일 필요충분조건은 R_0 에서 선형종속인 것이다. 다른 말로 표현하면, $R_0x = 0$ 일 때만 $Ax = 0$ 이다. 열공간은 서로 다르지만 차원 r 은 동일하다. 결론적으로 행렬 A 의 r 개의 피벗 열은 열공간 $C(A)$ 의 기저를 형성한다.

❸ 행렬 A 는 R_0 와 동일한 영공간을 갖는다. 차원이 $n - r$ 로 동일하고, 기저도 동일하다.

이유를 확인해보자. 소거해도 $Ax = 0$ 의 해는 바뀌지 않는다. $Ax = 0$ 의 특별해는 행렬 A 의 영공간의 기저를 형성한다. $(n - r)$ 개의 자유변수가 있으므로, 영공간의 차원은 $(n - r)$ 이다. 이 결과를 다음과 같이 $r + (n - r) = n$ 으로 정리하며, 카운팅 정리(counting theorem)라 한다.

$$(\text{열공간의 차원}) + (\text{영공간의 차원}) = (\mathbb{R}^n \text{의 차원})$$

❹ 행렬 A 의 좌영공간(A^T 의 영공간)의 차원은 $(m - r)$ 이다.

이유를 확인해보자. 행렬 A 에 대한 차원을 알 때, A^T 에 대한 차원을 알 수 있다. A^T 의 열공간의 차원이 r 임은 이미 증명되었다. A^T 가 $n \times m$ 행렬이므로 ‘전체 공간’은 $\mathbb{R}^m$ 이다. 행렬 A 에

대한 카운팅 정리는 $r + (n - r) = n$ 이다. A^T 에 대한 카운팅 정리는 $r + (m - r) = m$ 이다. 이 결과를 하나의 큰 정리로 나타내면 다음과 같다.

[정리] 선형대수학의 기본정리 1

- 열공간과 행공간의 차원은 모두 r 이다.
- 영공간과 좌영공간의 차원은 각각 $(n - r)$ 과 $(m - r)$ 이다.

개별 수나 벡터가 아닌 벡터공간에 집중함으로써, 이와 같은 정리를 얻을 수 있다. 곧 이 사실들은 당연하게 받아들여지게 될 것이다. 그러나 187개의 0이 아닌 성분으로 11×17 행렬을 구성한다면, 대부분은 다음과 같은 사실을 잘 이해하지 못할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{2가지 핵심 사실} \quad & (C(A) \text{의 차원}) = (C(A^T) \text{의 차원}) + (A \text{의 랭크}) \\ & (C(A) \text{의 차원}) + (N(A) \text{의 차원}) = 17 \end{aligned}$$

열공간에서 모든 벡터 $Ax = b$ 는 행공간의 정확히 하나의 벡터 x 로부터 나온다(만약 $Ay = b$ 라면 $A(x - y) = b - b = 0$ 이 된다. 따라서 $x - y$ 는 영공간에 포함되며 행공간에도 포함되므로 $x = y$ 이다). 행공간에서 열공간으로의 변환에서 A 는 $r \times r$ 가역행렬과 유사하다.

영공간을 통해 4.5절에서는 행렬 A 의 유사역행렬(pseudoinverse)을 정의한다.

EX ① 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ 에서 $m = 2$, $n = 3$, $r = 1$ 이다. 행렬 A 의 행공간은 원점과 $(1, 2, 3)$ 을 지나는 직선이다. 영공간은 평면 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ 이다. 이 직선과 평면의 차원은 각각 1, 2이다(즉 $1 + 2 = 3$). 열공간과 좌영공간은 $\mathbb{R}^2$ 에서 서로 직교하는 직선들이고, 차원은 각각 1, 1이다(즉 $1 + 1 = 2$).

$$(\text{열공간}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{를 지나는 직선}, \quad (\text{좌영공간}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{을 지나는 직선}$$

결과적으로 좌영공간에 있는 벡터 y 는 행렬 A 의 행들의 선형결합으로 영행을 만든다.

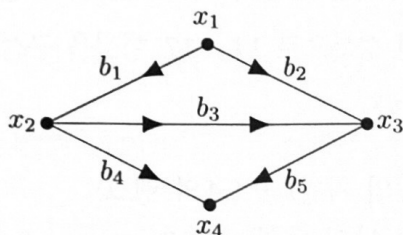
EX ② 식 (2)는 5개 방정식([그림 3.5]의 모든 에지 $b_1, \dots, b_5$ 에 대한 방정식)의 예이다. 5개의 방정식에는 4개의 미지수가 (모든 노드에 대해 하나씩) 있다. $Ax = b$ 에서 중요한 행렬인 A 를 결합행렬이라 한다. 모든 행에는 1, -1 이 있다.

$$Ax = b$$

에지 1, 2, 3, 4, 5
노드 1, 2, 3, 4
 $m = 5, n = 4$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= b_1 \\ -x_1 + x_3 &= b_2 \\ -x_2 + x_3 &= b_3 \\ -x_2 + x_4 &= b_4 \\ -x_3 + x_4 &= b_5 \end{aligned} \quad (2)$$

행렬 A 의 4가지 기본 부분공간(A 와 A^T 의 열공간과 영공간)을 이해한다면 선형대수학의 핵심 개념을 이해한 것이다.



노드	x_1	x_2	x_3	x_4	에지
	-1	1			1
	-1		1		2
		-1	1		3
		-1		1	4
			-1	1	5

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ -1 & & 1 & \\ & -1 & 1 & \\ & -1 & & 1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[그림 3.5] 5개의 에지와 4개의 노드가 있는 '그래프'이다. A 는 5×4 결합행렬이다.

- ❶ 영공간 $N(A)$ 에 대해 알아보자. 영공간을 찾기 위해 $b = 0$ 으로 놓는다. 그러면 첫 번째 방정식은 $x_1 = x_2$ 이고, 두 번째 방정식은 $x_3 = x_1$ 이며, 네 번째 방정식은 $x_2 = x_4$ 이다. 4개의 미지수 x_1, x_2, x_3, x_4 는 모두 동일한 값 c 를 갖는다. 벡터 $x = (c, c, c, c)$ 는 행렬 A 의 영공간을 채운다.

이 영공간은 $\mathbb{R}^4$ 의 직선이다. 특별히 $x = (1, 1, 1, 1)$ 은 $N(A)$ 의 기저를 형성한다. $N(A)$ 의 차원은 1이다(기저 안의 한 벡터이다). 행렬 A 의 랭크는 3이어야 한다. 왜냐하면 $(n - r) = (4 - 3) = 1$ 이기 때문이다. 이제 4가지 기본 부분공간의 차원을 모두 알고 있다.

- ❷ 열공간 $C(A)$ 에 대해 알아보자. $r = 3$ 개의 선형독립인 열이 있어야 한다. 빠른 방법은 행렬 A 의 처음 3개의 열을 살펴보는 것이다. 체계적인 방법은 $R_0 = \text{rref}(A)$ 를 찾는 것이다.

A 의 1, 2, 3열			
-1	1	0	
-1	0	1	
0	-1	1	
0	-1	0	
0	0	-1	

$$R_0 = \left(\begin{array}{c} \text{행렬 } A \text{의} \\ \text{기약행} \\ \text{사다리꼴} \end{array} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R_0 로부터 $R_0 \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 의 특별해 $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$ 을 확인할 수 있다. 처음 3개의 열은 피벗 열이고 4열은 자유 열이다. $C(R_0)$ 가 아니라 $C(A)$ 의 기저를 만들기 위해서는 행렬 A 의 1열, 2열, 3열로 돌아가야 한다. 열공간의 차원은 $r = 3$ 이다.

- ③ 행공간 $C(A^T)$ 에 대해 알아보자. 차원은 $r = 3$ 이다. 그러나 행렬 A 의 처음 3개의 행은 선형종속이다((3행) = (2행) - (1행)). 따라서 3행은 소거 후에 영행이 되었고, 3행은 4행과 교환되었다. 처음 3개의 선형독립인 행은 1행, 2행, 4행이다. 이 3개의 행은 행공간의 기저를 형성한다.

- 에지 1, 2, 3은 그래프에서 루프를 형성 $\Rightarrow$ 1, 2, 3행은 선형종속
- 에지 1, 2, 4는 트리를 형성, 트리에는 루프 없음 $\Rightarrow$ 1, 2, 4행은 선형독립

- ④ 좌영공간 $N(A^T)$ 에 대해 알아보자. 이제 $A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ 을 풀어보자. 행렬 A 의 행의 선형결합은 0이 된다. 행렬 A 에서 (3행) = (2행) - (1행)이므로, $\mathbf{y} = (1, -1, 1, 0, 0)$ 은 $A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ 의 해가 된다. 벡터 $\mathbf{y}$ 는 그래프에서 상단 루프를 따라 나타난다. 또 다른 벡터 $\mathbf{y}$ 는 하단 루프를 돌면서 나타나는데, 이 벡터가 $\mathbf{y} = (0, 0, -1, 1, -1)$ 이다((3행) = (4행) - (5행)). 두 벡터 $\mathbf{y}$ 는 선형독립이며 $A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ 의 해이고, $N(A^T)$ 의 차원은 $(m - r) = (5 - 3) = 2$ 여야 한다. 따라서 좌영공간 $N(A^T)$ 에 대한 기저를 얻는다.

‘루프’와 ‘트리’가 이 문제와 어떻게 연관되는지 궁금할 수 있다. $A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ 은 소거법을 이용해 해결할 수 있었다. 4×5 행렬 A^T 는 3개의 피벗 열 1, 2, 4열과 2개의 자유 열 3, 5열을 갖는다. 따라서 $A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ 은 두 특별해를 가지며, A^T 에 대한 영공간의 차원은 $(m - r) = (5 - 3) = 2$ 이다. 루프와 트리는 모든 결합행렬에 대해 선형종속인 행과 선형독립인 행을 아름답게 식별한다.

방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 는 4개의 노드 x_1, x_2, x_3, x_4 에서 ‘전압’을 알려준다. 방정식 $A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ 은 5개의 에지에서 ‘전류’ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 를 알려준다. 이 두 방정식이 **키르히호프의 전압 법칙** (Kirchhoff's voltage law)과 **키르히호프의 전류 법칙**이다. 두 법칙은 전기 네트워크에 적용된다. 그러나 이 용어에 숨겨진 아이디어는 공학, 과학, 경제, 비즈니스 등의 전반에 걸쳐 적용된다. 선형대수학은 이 법칙을 4가지 기본 부분공간에 연결한다.

그래프는 이산 응용수학에서 가장 중요한 모델이다. 도로, 파이프라인, 혈류, 뇌, 웹, 국가나 세계의 경제 등의 다양한 분야에서 그래프를 볼 수 있다. 우리는 그래프의 행렬 A , A^T 를 이해할 수 있다. 요약하면 다음과 같다.

결합행렬 A 는 n 개의 노드와 m 개의 에지가 연결된 그래프로부터 나온다. 행공간과 열공간의 차원은 $r = (n - 1)$ 이다. A 와 A^T 에 대한 영공간의 차원은 각각 1, $(m - n + 1)$ 이다.

- $N(A)$: 상수벡터 $(c, c, \dots, c)$ 는 행렬 A 의 영공간을 구성한다(차원은 1).
- $C(A^T)$: 모든 트리의 에지는 행렬 A 의 r 개의 선형독립인 행을 제공한다($r = n - 1$).
- $C(A)$: [전압법칙] Ax 의 성분들은 모든 루프 주위를 돌면서 0이 된다(차원은 $n - 1$).
- $N(A^T)$: [전류법칙] $A^T y = (\text{유입량}) - (\text{유출량}) = 0$ 의 해는 루프 전류이다.

그래프에는 $(m - r) = (m - n + 1)$ 개의 선형독립인 작은 루프들이 있다.

평면의 모든 그래프에 대해 선형대수학은 다음과 같은 **오일러 공식**(Euler's formula)을 유도한다.

$$(\text{노드 개수}) - (\text{에지 개수}) + (\text{작은 루프 개수}) = (n) - (m) + (m - n + 1) = 1$$

(랭크 2 행렬) = (랭크 1 행렬) + (랭크 1 행렬)

랭크 1 행렬은 uv^T 형태이다. 다음은 랭크가 $r = 2$ 인 행렬 A 이다. 행렬 A 에서 바로 r 을 확인할 수는 없다. 따라서 행 연산으로 행렬 A 를 축소하여 R_0 를 얻는다. R_0 는 행렬 A 와 행공간이 동일하다. 영행을 지워서 동일한 행공간을 갖는 R 을 얻는다.

$$\text{랭크 2} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = CR \quad (3)$$

행렬의 열을 살펴보자. R 의 피벗 열은 당연히 $(1, 0)$, $(0, 1)$ 이다. 그러면 행렬 A 의 피벗 열도 1열과 2열이다. 즉 $u_1 = (1, 1, 4)$, $u_2 = (0, 1, 2)$ 이다. C 의 처음 2개의 열이 동일함을 알 수 있다. 왜냐하면 R 안에 있는 항등행렬의 두 열을 곱해도 피벗 열 u_1 , u_2 는 변하지 않기 때문이다.

열과 행을 다음과 같이 나타내면 (랭크 2 행렬) = (랭크 1 행렬) + (랭크 1 행렬)이 된다.

$$\text{랭크 2 행렬 } A \quad A = [u_1 \ u_2 \ u_3] \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ (0 \text{ 행}) \end{bmatrix} = u_1 v_1^T + u_2 v_2^T$$

위 식은 $(C \text{의 열}) \times (R \text{의 행})$ 이다. 모든 랭크 r 행렬은 랭크 1 행렬들의 합이다.

3.5 확인문제

- 3.5A 5×6 영행렬에서 4개의 0을 1로 바꿔라. 단, 행공간의 차원을 가능한 한 작게 유지해야 한다. 또 열공간의 차원을 가능한 한 작게 만드는 모든 방법에 대해 설명하라. 그런 다음 영공간의 차원을 가능한 한 작게 만드는 모든 방법에 대해 설명하라. 4가지 기본 부분공간의 차원의 합을 작게 만드는 방법은 무엇인가?

풀이

4개의 1이 동일한 행으로 들어갈 때 혹은 동일한 열로 들어갈 때 랭크는 1이 된다. 또한 1은 2개의 행과 2개의 열로 들어갈 수도 있다(즉 $a_{ii} = a_{ij} = a_{ji} = a_{jj} = 1$). 열공간과 행공간은 항상 동일한 차원을 가지므로, 이를 통해 처음 두 질문에 대한 답을 얻는다. 다시 말해 행공간의 차원과 열공간의 차원의 최솟값은 1이다.

영공간은 랭크가 $r=4$ 일 때 가능한 한 가장 작은 차원 $(6-4)=2$ 를 갖는다. 랭크가 4이려면, 1은 4개의 서로 다른 행과 4개의 서로 다른 열로 들어가야 한다.

랭크의 합 $r + (n-r) + r + (m-r) = n+m$ 에 대해서는 아무것도 할 수 없다. 어떤 식으로 배치하든 상관없이 랭크의 합은 $6+5=11$ 이다. 랭크의 합은 행렬 안에 1이 없더라도 11이다. 행렬 A 의 다른 모든 성분이 0 대신 1이라면, 답은 어떻게 바뀔까?

- 3.5B AB 의 모든 행은 행렬 B 의 행들의 선형결합이다. 따라서 AB 의 행공간은 B 의 행공간에 포함된다(같을 수도 있다). 따라서 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$ 이다.

AB 의 모든 열은 행렬 A 의 열들의 선형결합이다. 따라서 AB 의 열공간은 A 의 열공간에 포함된다(같을 수도 있다). 따라서 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ 이다.

행렬 A 에 가역행렬 B 를 곱하면 랭크는 변하지 않는다. 행렬을 곱할 때 랭크는 증가할 수 없다. 또한 AB 의 뒤에 B^{-1} 를 곱하면 랭크가 다시 증가할 수 없으므로, AB 의 랭크가 A 보다 감소할 수는 없다. [부록 A1]에서 행렬의 랭크에 관한 주요 사실을 정리한다.

3.5 연습문제

- 다음 물음에 답하라.
 - 7×9 행렬의 랭크가 5인 경우, 4가지 기본 부분공간의 차원은 어떻게 되는가? 또 4가지 기본 부분공간의 차원의 합은 무엇인가?
 - 3×4 행렬의 랭크가 3인 경우, 열공간과 좌영공간은 무엇인가?

2. 다음 행렬 A 와 B 에 관한 4가지 기본 부분공간의 기저와 차원을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

3. 다음 행렬 A 의 4가지 기본 부분공간의 기저를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 다음 성질을 가진 행렬을 구성하거나, 구성이 불가능한 이유를 설명하라.

- (a) 열공간은 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 을 포함한다. 행공간은 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 를 포함한다.
 (b) 열공간은 기저벡터로 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 을 포함하고, 영공간은 기저벡터로 $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 을 포함한다.
 (c) (영공간의 차원) = 1 + (좌영공간의 차원)
 (d) 영공간은 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 을 포함하고, 열공간은 $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 을 포함한다.
 (e) (행공간) = (열공간), (영공간) $\neq$ (좌영공간)

5. V 가 $(1, 1, 1)$ 과 $(2, 1, 0)$ 으로 생성된 부분공간일 때, V 를 행공간으로 갖는 행렬 A 를 구하라. 또 V 를 영공간으로 갖는 행렬 B 를 구하라.

6. 다음 두 행렬에 대해 소거를 이용하지 않고 4가지 기본 부분공간의 차원과 기저를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

7. 3×3 행렬 A 가 가역행렬이라 하자. 행렬 A 의 4가지 기본 부분공간의 기저를 구하라. 또한 3×6 행렬 $B = [A \ A]$ 의 4가지 기본 부분공간의 기저를 구하라.
 8. 다음 행렬 A, B, C 의 4가지 기본 부분공간의 차원을 구하라. 단, I 는 항등행렬이고, 0 은 3×2 행렬이다.

$$A = [I \ 0], \quad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0^T & 0^T \end{bmatrix}, \quad C = [0]$$

9. 다양한 크기의 다음 행렬에 대해 어떤 부분공간이 동일한가? 또한 다음 세 행렬의 랭크 r 이 동일함을 증명하라.

(a) $[A]$ 와 $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ 와 $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$

10. 3×3 행렬의 성분이 0과 1 중에서 무작위로 선택되는 경우, 4가지 기본 부분공간의 차원으로 가장 가능성이 높은 차원은 무엇인가? 3×5 랜덤행렬인 경우에는 어떻게 될까?

11. (중요한 문제) A 는 랭크가 r 인 $m \times n$ 행렬이다. $Ax = b$ 의 해가 존재하지 않는다고 할 때, 다음 물음에 답하라.

(a) m, n, r 이 만족해야 하는 부등식을 모두 작성하라($<$ 또는 $\leq$ 를 이용).

(b) $A^T y = 0$ 의 해로 $y = 0$ 이 아닌 다른 해가 있음을 어떻게 알 수 있는가?

12. 벡터 $(1, 0, 1), (1, 2, 0)$ 을 행공간과 열공간의 기저벡터로 갖는 행렬을 구성하라. 이 벡터들이 행공간과 열공간의 기저벡터가 될 수 없는 이유는 무엇인가?

13. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라(참이면 이유를 제시하고, 거짓이면 반례를 찾으라).

(a) $m = n$ 이면 행렬 A 의 행공간은 열공간과 동일하다.

(b) 행렬 A 와 $-A$ 는 동일한 4가지 기본 부분공간을 갖는다.

(c) 행렬 A 와 B 가 동일한 4가지 기본 부분공간을 갖는다면, A 는 B 의 상수배이다.

14. 계산 없이 다음 행렬 A 의 4가지 기본 부분공간의 기저를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

15. 행렬 A 의 처음 두 행을 교환하면 4가지 기본 부분공간 중 무엇이 동일하게 유지되는가? 벡터 $v = (1, 2, 3, 4)$ 가 행렬 A 의 좌영공간에 있는 경우, 행 교환 후 새로운 행렬의 좌영공간에 있는 벡터 하나를 작성하라.

16. 벡터 $v = (1, 0, -1)$ 이 행렬 A 의 행이 될 수 없으며 행렬 A 의 영공간에도 있을 수 없는 이유에 대해 설명하라.

17. 다음 행렬에 관한 $\mathbb{R}^3$ 안의 4가지 기본 부분공간에 대해 설명하라.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18. (3×3 행렬에 대해) 틱택토(tic-tac-toe) 게임을 완성할 수 있는가(행렬 A 에 5개의 1과 4개의 0이 있음)? 단, 마지막에 완성되는 행렬 A 의 랭크는 2이고, 둘 중 어느 쪽도 승리하는 수를 포기하지 않는다.

19. (좌영공간) 다음과 같이 여분의 열 b 를 추가하여 행렬 A 를 기약행 사다리꼴로 축소하자.

$$[A \ b] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 4 & 5 & 6 & b_2 \\ 7 & 8 & 9 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{bmatrix}$$

행렬 A 의 행들의 선형결합이 영행을 생성했다. 어떤 선형결합인가?(오른쪽에 있는 $b_3 - 2b_2 + b_1$ 을 확인한다). 어떤 벡터가 A^T 의 영공간에 있고 어떤 벡터가 A 의 영공간에 있는가?

20. (인내를 요하는 문제) 행렬 A 를 기약행 사다리꼴 R_0 로 축소하는 행 연산에 대해 설명하라.

21. 행렬 A 는 랭크 1 행렬의 합이다($A = uv^T + wz^T$). 다음 물음에 답하라.

- (a) A 의 열공간을 생성하는 벡터는 무엇인가?
- (b) A 의 행공간을 생성하는 벡터는 무엇인가?
- (c) 랭크가 2보다 작기 위한 조건을 2가지 작성하라.
- (d) $u = z = (1, 0, 0)$, $v = w = (0, 0, 1)$ 일 때, A 를 구하고 이 행렬의 랭크를 구하라.

22. 열공간의 기저벡터가 $(1, 2, 4)$, $(2, 2, 1)$ 이고, 행공간의 기저벡터가 $(1, 0)$, $(1, 1)$ 이 되는 행렬 $A = uv^T + wz^T$ 를 구하라. 그리고 A 를 3×2 행렬과 2×2 행렬의 곱으로 나타내라.

23. 행렬을 직접 곱하지 않고, 다음 행렬 A 의 행공간과 열공간의 기저를 구하라. 다음 행렬의 형태로부터 A 가 비가역행렬임을 어떻게 알 수 있는가?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

24. (중요한 문제) 벡터 d 가 4가지 기본 부분공간 중 어느 공간에 있을 때, $A^T y = d$ 의 해가 존재하는가? 또 어떤 부분공간이 영벡터만 포함할 때, $A^T y = d$ 가 유일한 해를 갖는가?

25. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라(참이면 이유를 제시하고, 거짓이면 반례를 찾으라).

- (a) A 와 A^T 는 동일한 개수의 피벗을 갖는다.
- (b) A 와 A^T 는 동일한 좌영공간을 갖는다.
- (c) A 의 행공간이 열공간과 동일하면 $A^T = A$ 이다.
- (d) $A^T = -A$ 이면 A 의 행공간은 열공간과 동일하다.

26. $a \neq 0$ 인 a, b, c 에 대해 행렬 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 의 랭크가 1이 되도록 하는 d 를 찾으라. 그리고 행공간과 영공간의 기저를 구하라. 또한 두 공간이 서로 직교함을 보여라.

도전문제

27. 다음과 같은 8×8 크기의 체커보드 행렬(checkerboard matrix) B 와 체스 행렬(chess matrix) C 의 랭크를 구하라.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} r & n & b & q & k & b & n & r \\ p & p & p & p & p & p & p & p \\ p & p & p & p & p & p & p & p \\ p & p & p & p & p & p & p & p \\ r & n & b & q & k & b & n & r \end{bmatrix} \quad (4\text{개의 영행})$$

r, n, b, q, k, p 는 서로 다른 수이다. 행렬 B, C 의 행공간과 좌영공간의 기저를 구하라. 또 C 의 영공간의 기저를 구하라.

28. $A = uv^T$ 는 랭크가 1인 2×2 행렬이다. [그림 3.5]를 다시 그려서 4가지 기본 부분공간을 명확하게 나타내라. 만약 행렬 B 가 동일한 4가지 기본 부분공간을 생성한다면, B 는 A 와 어떤 관계인가?
29. $\mathbf{M}$ 은 3×3 행렬의 공간이다. 다음과 같이 $\mathbf{M}$ 안의 모든 행렬 X 앞에 A 를 곱한다. 주어진 물음에 답하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

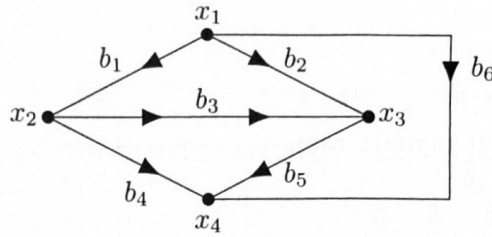
- (a) $AX = 0$ 을 만족하는 행렬이 되려면 X 는 어떤 행렬이어야 하는가?
 (b) 적당한 행렬 X 를 고를 때, 어떤 행렬이 AX 의 형태를 갖는가?

(a)를 통해 AX 에 대한 영공간을 찾고, (b)를 통해 열공간을 찾으라. $\mathbf{M}$ 의 영공간과 열공간의 차원은 무엇인가? 두 차원을 더하면 왜 9가 되는가?

30. $m \times n$ 행렬 A, B 가 동일한 4가지 기본 부분공간을 갖는다고 가정하자. A, B 가 모두 기약행 사다리꼴이면, F 와 G 는 반드시 동일해야 하는가?

$$A = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

31. 다음 그래프에 대해 결합행렬을 구하고, 이 행렬의 랭크와 4가지 기본 부분공간에 있는 벡터 하나를 각각 구하라.



32. (복습문제) 다음 물음에 답하라.

- (a) $N(AB)$ 또는 $N(BA)$ 가 $N(A)$ 에 포함되는가?
 (b) $C(AB)$ 또는 $C(BA)$ 가 $C(A)$ 에 포함되는가?

33. A 는 $m \times n$ 행렬이고 B 는 $M \times n$ 행렬이며 $T = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 이다. 다음 물음에 답하라.

- (a) 세 행렬 A, B, T 의 영공간 사이의 관계를 설명하라.
 (b) 세 행렬 A, B, T 의 행공간 사이의 관계를 설명하라.

34. A 는 $m \times n$ 행렬이다. A 와 $W = [A \ A]$ 의 4가지 기본 부분공간에 대해 설명하라.

35. A 와 B 는 $n \times n$ 행렬이다. $\text{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \text{rank}[A \ B]$ 는 항상 참인가?

3장에 대한 고찰 : 소거의 큰 그림

여기서는 A 가 R 로 축소될 때의 소거를 벡터 수준과 부분공간 수준에서 설명한다. 각 단계들은 이미 알고 있으므로 반복해 설명하지 않겠다. 소거는 첫 번째 피벗에서 시작한다. 한번에 열을 왼쪽에서 오른쪽으로, 한번에 행을 위쪽에서 아래쪽으로 이동하면 U 가 된다. 계속 위쪽으로 소거하면 R_0 와 R 을 얻는다. 소거는 다음 2가지 질문에 대한 답을 제공한다.

Q1. 행렬의 해당 열은 이전 열들의 선형결합인가?

열에 피벗이 포함된 경우 답은 '그렇지 않다'이다. 피벗 열은 이전 열들과 '선형독립'이다. 4열에 피벗이 없는 경우, 이 열은 1열, 2열, 3열의 선형결합이다.

Q2. 행렬의 해당 행은 이전 행들의 선형결합인가?

행에 피벗이 포함된 경우 답은 ‘그렇지 않다’이다. 피벗 행은 이전 행들과 선형독립이며, 피벗 행의 0이 아닌 첫 번째 성분은 1로부터 1이다. R_0 에서 성분이 모두 0인 행은 선형독립이 아니다. 이러한 영행들은 R 에서 사라진다. 이제 행렬은 $r \times n$ 행렬이다.

행렬의 소거 과정을 거치면서 q1과 q2에 대한 답을 구할 수 있다. 소거 과정은 행에 적용하지만, 그 결과는 열에 대한 정보도 준다. R 의 항등행렬은 행렬 A 의 처음 r 개의 선형독립인 열을 찾는다. 그런 다음 R 의 자유 열 F 는 행렬 A 의 선형종속인 열을 생성하는 선형독립인 열들의 선형결합을 알려준다. $A = CR$ 분해를 보지 않고는 이 사실을 놓치기 쉽다.

R 은 $Ax = 0$ 에 대한 특별해를 알려준다. 행렬 A 로부터 다양한 행 교환과 소거 과정을 통해 R 에 도달할 수 있지만, 항상 동일한 R 로 끝난다(왜냐하면 특별해는 행렬 A 에 의해 완전히 결정되기 때문이다. 이와 관련한 공식은 3.2절 연습문제 앞에 있다). R 은 다음과 같이 3가지 기본 부분공간에 대한 ‘기저’를 드러낸다.

- A 의 열공간 : R 에서 피벗을 생성하는 행렬 A 의 r 개의 열을 선택한다.
- A 의 행공간 : R 의 r 개의 행을 기저벡터로 선택한다.
- A 의 영공간 : $Rx = 0$ (그리고 $Ax = 0$)에 대한 $(n-r)$ 개의 특별해를 선택한다.

좌영공간 $N(A^T)$ 의 경우, 소거 단계 $EA = R_0$ 를 살펴본다. R_0 의 마지막 $(m-r)$ 개의 행은 영행이다. E 의 마지막 $(m-r)$ 개의 행은 좌영공간의 기저를 형성한다. 첨가행렬 $[A \ I]$ 를 $[R_0 \ E]$ 로 축소하면, 행렬 E 는 소거하지 않으면 손실될 수 있는 소거에 대한 기록을 유지한다.

행렬 C, B 를 고정시킨다고 가정해보자(각각 크기가 $m \times r, r \times n$ 이고, 랭크는 모두 r 이다). 가역인 임의의 $r \times r$ 혼합행렬(mixing matrix) M 을 선택한다. 모든 행렬 CMB 는 동일한 4가지 기본 부분공간을 갖는다.

[참고] 이 책은 소거의 결과를 행렬 형식 $A = CR = C[I \ F]P$ 로 표현한 최초의 책이다. 소거를 통해 C, F, P 와 $A = [C \ CF]P$ 가 드러난다.

$A = [(C \text{의 선형독립인 열}) (CF \text{의 선형종속인 열})]$ 은 열을 교환한다.

$m \times n$ 행렬 A 의 행 연산에 대한 복습

행연산은 다음과 같다.

- ① 다른 행에서 한 행의 상수배를 뺀다.
- ② 두 행을 서로 교환한다.
- ③ 행에 0이 아닌 상수를 곱한다.

중요한 점은 이러한 행 연산이 다음과 같이 가역적이라는 것이다.

- ① 한 행의 상수배를 다른 행에 다시 더한다.
- ② 두 행을 다시 교환한다.
- ③ 행을 0이 아닌 상수로 나눈다.

행 연산에 따른 결과는 ' $m \times m$ 가역행렬 E 를 행렬 A 앞에 곱하는 것'과 같다.

영공간은 E 를 곱한다고 해서 바뀌지 않는다($Ax=0 \Rightarrow EAx=0 \Rightarrow Ax=0$). A 와 EA 의 행은 서로 다르지만, 행공간과 영공간은 동일하다.

기약행 사다리꼴 E 는 $EA = R_0 = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P = \text{rref}(A)$ 를 생성할 수 있음

항등행렬 I 는 $r \times r$ 행렬, F 는 $r \times (n-r)$ 행렬이고, P 는 n 개의 열을 올바른 순서로 배치한다.

분해 $A = CR = [\text{처음 } r\text{개의 선형독립인 열}] [I \ F] P$

$A = [C \ CF] P = [(\text{선형독립인 열}) (\text{선형종속인 열})]$ 은 열의 순서를 재배치함

행렬 A 의 영공간 F 의 각 열은 $Ax=0$ 에 대한 $(n-r)$ 개의 '특별해' 중 하나로 이어짐

특별해 $s_k = P^T \begin{bmatrix} -F\text{의 } k\text{개 열 } (r \times (n-r)) \\ + I\text{의 } k\text{개 열 } ((n-r) \times (n-r)) \end{bmatrix}$

치환행렬 P^T 는 해 s_k 의 n 개의 성분을 올바른 순서로 배치한다.

EX $P = I$ 이고 랭크가 $r=3$ 일 때, $Ax=0$, $Rx=0$ 에 대한 특별해는 s_1 이다.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Rs_1 = 0, \quad As_1 = CRs_1 = 0$$