

# 1

---

## 벡터와 행렬

1.1 벡터와 선형결합

1.2 내적으로부터의 길이와 각

1.3 행렬과 열공간

1.4 행렬곱  $AB$ 와  $CR$

1장에 대한 고찰



선형대수학은 벡터  $v$ 와 행렬  $A$ 에 관한 학문이다. 행렬과 벡터는 (서로의 크기(size)가 같을 때) 더하거나 빼거나 곱할 수 있는 기본 객체이다. 먼저 다음과 같은 벡터  $v$ 는  $v_1 = 2, v_2 = 4$ 의 2가지 성분으로 구성된 2차원 벡터이다. 또한 벡터  $w$ 도 2차원 벡터이다. 따라서 다음과 같이 두 벡터  $v, w$ 를 더할 수 있다.

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad v + w = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 **선형결합**(linear combination)은 임의의 수  $c, d$ 에 대해  $cv + dw$  형태로 표현된다. 예를 들어 다음과 같다.

임의의 수  $c, d$ 에 대해 선형결합  $c \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c + 1d \\ 4c + 3d \end{bmatrix}$ 는  $xy$ -평면을 채운다.

앞서 살펴본 벡터  $w$ 의 **길이**(length)는  $\|w\| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ 이다. 또한 두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 **내적**(dot product)은  $v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14$ 이다. 1.2절에서는  $v \cdot w$ 가 두 벡터의 사잇각을 나타낸다는 내용에 대해 다룬다.

1.3절에서는 **행렬**(matrix)을 소개한다. 다음과 같은 행렬  $A$ 는 두 **열벡터**(column vector)를 포함한다. 각 벡터에는 두 개의 성분이 있으므로 행렬  $A$ 는  $2 \times 2$  행렬이다.

$$A = [v \ w] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

행렬에 벡터를 곱하면 행렬의 열들의 선형결합  $cv + dw$ 를 얻는다.

$$A \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c + 1d \\ 4c + 3d \end{bmatrix} = cv + dw$$

(임의의 수  $c, d$ 에 대한) 모든 선형결합  $A \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 는 행렬  $A$ 의 **열공간**(column space)을 생성한다. 여기서 열공간은 원점을 지나는 평면이다.

다음과 같이 세 벡터로 구성된 새로운 행렬  $B$ 는 3개의 열  $v, w, z$ 를 갖는다. 여기서  $z$ 는  $v$ 와  $w$ 의 선형결합이다. 따라서 행렬  $B$ 의 열공간은 여전히  $xy$ -평면이다. 두 벡터  $v$ 와  $w$ 는 **선형독립**(linear independent)이다. 하지만 세 벡터  $v, w, z$ 는 **선형종속**(linear dependent)이다. 즉 다음과 같이  $v, w, z$ 의 선형결합으로 영벡터를 생성할 수 있다.

$$B = [v \ w \ z] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = v + w - z = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

최종 목표는 (행렬곱  $AB$ 의  $i$ 열) = (행렬  $A$ )  $\times$  (행렬  $B$ 의  $i$ 열)임을 이해하는 것이다.



## 1.1 벡터와 선형결합

1.  $2v - 3w$ 는 두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 **선형결합**이다.
2.  $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $w = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 이면,  $2v - 3w = 2\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 이다.
3. 모든 실수  $c, d$ 에 대한 선형결합  $c\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 은  $xy$ -평면을 채운다. 즉 이 선형결합은 모든 벡터  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 를 생성한다.
4. 모든 실수  $c, d$ 에 대한 선형결합  $c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ 는  $xyz$ -공간 안에서 원점을 지나는 **평면**을 채운다. 이때 벡터  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 은 이 평면 위에 없다.

미분적분학은 수  $x$ 와 함수  $f(x)$ 로 시작한다. 선형대수학은 두 벡터  $v, w$ 와 그 선형결합  $cv + dw$ 로 시작한다. 즉 선형대수학은 2개 또는 그 이상의 (아마도 굉장히 많은) 차원을 다룬다. 그러나 두 벡터  $v, w$ 의 선형결합은 다음과 같이 단 2가지 기본 연산으로 구축된다.

벡터  $v$ 에 수 곱하기

$$3v = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

동일한 차원의 두 벡터  $v$ 와  $w$  더하기

$$v + w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

위의 2가지 연산은 다음과 같이 하나의 선형결합  $cv + dw$ 로 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{l} \text{선형결합} \\ c = 5, d = -2 \end{array} \quad 5v - 2w = 5\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

이러한 선형결합에 대한 아이디어를 통해 다음과 같은 2가지 중요한 질문을 생각할 수 있다.

- ① 모든 선형결합  $cv + dw$ 에 대해 설명할 수 있는가? 이 선형결합은 평면이나 직선을 채우는가?
- ② 특정 선형결합  $cv + dw = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 을 만드는 수  $c$ 와  $d$ 를 찾을 수 있는가?

1.1절에서는 이 질문에 대한 답을 찾는다. 그러나 선형대수학은 2차원에서 단지 2개의 벡터를 다루는 문제로 제한되지 않는다. 따라서 문제는 더 커지고(더 많은 차원) 더 어려워질 수 있다(더 많은 벡터). 앞으로는 2개의 성분 대신  $m$ 개의 성분을 가진 벡터를 살펴볼 것이다. 또한 2개의 벡터 대신  $n$ 개의 벡터  $v_1, v_2, \dots, v_n$ 을 다룰 것이다.



$m$ 차원 공간에서  $n$ 개의 벡터는 다음과 같이  $m \times n$  행렬의 열로 사용된다.

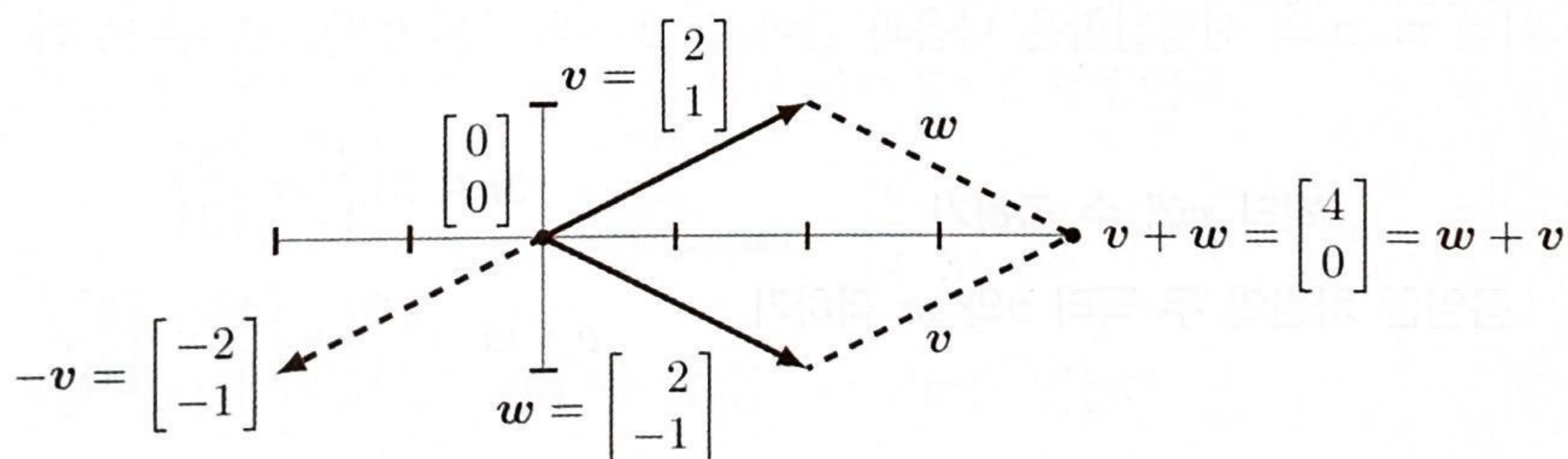
$$\begin{array}{l} m\text{개의 행} \\ n\text{개의 열} \\ m \times n \text{ 행렬} \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

이제는 행렬  $A$ 를 이용해 앞서 살펴본 2가지 질문을 다시 살펴보자. 그다음  $m = 2, n = 2$ 인 경우를 생각해보자.

- ❶ 열들의 모든 선형결합  $Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$ 에 대해 설명할 수 있는가?
- ❷ 구하고자 하는 출력 벡터  $Ax = b$ 를 생성하는 수  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 을 찾을 수 있는가?

### 선형결합 $cv + dw$

2차원 공간의 벡터  $v$ 는 2개의 성분을 갖는다. 두 벡터  $v$ 와  $-v$ 를 그리기 위해 다음과 같이 영벡터에서 시작하는 화살표를 사용한다.



(모든 수  $c$ 에 대해) 벡터  $cv$ 는  $xy$ -평면에서 직선을 만든다. 만약 벡터  $w$ 가 이 직선 위에 없다면 (수  $d$ 에 대해) 벡터  $dw$ 는 또 다른 직선을 만든다. 목표는 선형결합  $cv + dw$ 로 평면 전체를 채우는 것이다. 벡터  $v$ 로 만든 직선과 벡터  $w$ 로 만든 직선 위의 벡터들의 선형결합은 평면 위의 모든 점을 생성한다.

다음은 4가지 선형결합의 예이다. 이외에도 벡터 앞의 숫자로 임의의 수  $c, d$ 를 선택할 수 있다.

$$1v + 1w = (\text{벡터의 합})$$

$$1v - 1w = (\text{벡터의 차})$$

$$0v + 0w = (\text{영벡터})$$

$$cv + 0w = (v \text{ 방향의 벡터 } cv)$$



## 연립방정식 풀기

보통 선형대수학에서는 그림으로 이해해야 할지, 혹은 계산으로 풀어야 할지를 선택할 수 있다. 그림으로 이해하는 경우는  $v + w$ 와  $w + v$ 로 시작할 수 있다(참고로 두 벡터는 동일하다). 또 다른 중요한 벡터는  $w - v$ 로, 이 벡터는  $w$ 에서  $v$ 의 반대방향으로 이동한다. 이 책의 [지은이 머리말]에서 평면을 채우는 선형결합을 나타낸 여러 가지 그림을 제시했다. 특정 벡터  $cv + dw = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ 에 대해  $c, d$ 를 구하고자 한다면 이 문제는 다음과 같이 2가지 방법으로 나타낼 수 있다.

❶  $c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ 를 풀어라.

❷ 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{aligned} 2c + 2d &= 8 \\ c - d &= 2 \end{aligned}$$

위 문제의 해를 구하는 방법은 간단하다. 어떤 방정식에 0이 아닌 수를 곱하거나, 한 방정식에서 다른 방정식을 빼면 된다. 여기서 핵심은 방정식의 좌변에 0을 만드는 것이다.

$\frac{1}{2} \times$  (❷의 첫 번째 방정식)은  $c + d = 4$ 이다.

(❷의 두 번째 방정식)에서  $c + d = 4$ 를 빼다.

$$2c + 2d = 8$$

$$0c - 2d = -2$$

그러면  $c$ 가 소거된다.

위에서 얻은 두 번째 방정식  $0c - 2d = -2$ 에 따라  $d = 1$ 이다. 이를 첫 번째 방정식  $2c + 2d = 8$ 에 대입하면  $c = 3$ 이다.  $c = 3, d = 1$ 을 이용해 선형결합으로 나타내면 다음과 같다.

$$3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ 행렬 형태로 나타내면 } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

### 열 방법, 행 방법, 행렬 방법

열 방법  
(선형결합)

$$c \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

행 방법  
( $c, d$ 에 대한 두 방정식)

$$\begin{aligned} v_1 c + w_1 d &= b_1 \\ v_2 c + w_2 d &= b_2 \end{aligned}$$

행렬 방법  
( $2 \times 2$  행렬)

$$\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$



만약 두 벡터  $v$ ,  $w$ 와 영벡터가 동일한 직선 위에 있지 않다면 정확히 하나의 해만 존재한다. 이 경우 두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 선형결합은  $xy$ -평면을 채우고, 벡터  $v$ 와  $w$ 는 ‘선형독립’이다. 이때  $2 \times 2$  행렬  $A = [v \ w]$ 의 ‘역행렬은 존재’한다.

## 소거법이 실패할 수 있는가?

해를 구하기 위한 소거법은 주어진 방정식의 해가 존재하지 않는 경우에만 실패하게 된다. 이러한 경우는 두 벡터  $v$ 와  $w$ 가 원점  $(0, 0)$ 을 지나는 동일한 직선 위에 있을 때 발생한다. 이때 두 벡터는 선형독립이 아니다. 또한 벡터  $v$ ,  $w$ 와 두 벡터의 모든 선형결합은 동일한 직선 위에 있다. 만약 벡터  $b$ 가 이 직선 위에 없다면 방정식  $cv + dw = b$ 의 해는 존재하지 않는다.

**EX** 다음과 같이 벡터와 연립방정식이 주어져 있다고 하자.

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} 1c + 3d &= 1 \\ 2c + 6d &= 0 \end{aligned}$$

위 연립방정식은 풀 수 없다. 두 번째 방정식에서 2를 제거하기 위해, 첫 번째 방정식에 2를 곱한다. 그다음 두 번째 방정식  $2c + 6d = 0$ 에서  $2c + 6d = 2$ 를 뺀다. 계산 결과는  $0 = -2$ 이므로, 이는 불가능하다.  $c$ 만 소거하려고 했는데  $d$ 까지 소거되었기 때문이다.

두 벡터  $v$ 와  $w$ 가 동일한 직선 위에 있으면  $v$ 와  $w$ 의 선형결합은 평면을 채우는 것이 아니라 직선을 채운다. 만약 벡터  $b$ 가 이 직선 위에 없다면 두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 어떤 선형결합도  $b$ 와 같을 수 없다. 이때  $w = 3v$ 이므로 두 벡터  $v$ 와  $w$ 는 ‘선형종속’이다.

2차원 평면에서 선형독립인 두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 선형결합은 해당 평면의 모든 벡터  $b$ 를 생성할 수 있다. 이때 다음 방정식의 해는 존재한다.

2개의 방정식  
2개의 미지수

$$cv + dw = b$$

$$\begin{aligned} cv_1 + dw_1 &= b_1 \\ cv_2 + dw_2 &= b_2 \end{aligned}$$

### 요약

두 벡터  $v$ 와  $w$ 가 동일한 직선 위에 있지 않으면, 선형결합  $cv + dw$ 는  $xy$ -평면을 채운다.

다음은 소거법을 적용하기 어려워 보이는 중요한 방정식의 예이다. 그러나 일련의 과정을 통해 문제를 쉽게 해결하고 소거법을 계속 진행할 수 있다.



$$c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 0 + 2d = 2 \\ c + 3d = 7 \end{cases}$$

첫 번째 방정식에 0이 있어서 소거법을 적용하기 어려워 보인다. 그러나 두 방정식의 순서를 바꾸면 다음과 같이  $c, d$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{cases} c + 3d = 7 \\ 0 + 2d = 2 \end{cases} \text{ 을 풀면 } d = 1, c = 4 \text{이다.}$$

### 3차원 벡터

두 벡터  $v$ 와  $w$ 가 2개가 아닌 3개의 성분을 갖는다고 가정하자. 이제 두 벡터  $v$ 와  $w$ 는 3차원 공간의 벡터이다(3차원 공간은  $\mathbb{R}^3$ 으로 표기한다). 벡터  $v$ 와  $w$ 는 영벡터에서 시작하여 공간 위의 점으로 가는 화살표로 생각한다. 벡터  $v$ 와  $w$ 의 선형결합은 다음과 같다.

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v + w = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad cv + dw = \begin{bmatrix} 2c + d \\ 3c + d \\ c + 0 \end{bmatrix}$$

그러나 앞서 살펴본 2차원의 경우와 차이점이 있다. 벡터  $v$ 와  $w$ 의 선형결합이 3차원 공간 전체를 채우지 않는다. 벡터가 2개뿐인 경우, 벡터의 선형결합은 기껏해야 2차원 평면을 채울 수 있다. 이는 선형종속인 경우가 아니라 단지 벡터가 충분하지 않은 것일 뿐이다.

벡터들의 선형결합이 3차원 공간을 채우려면 선형독립인 세 벡터가 필요하다. 다음은 선형독립인 세 벡터의 가장 간단한 예이다.

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad ci + dj + ek = \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} \quad (1)$$

벡터  $i, j, k$ 는 3차원 공간  $\mathbb{R}^3$ 에서  $x, y, z$ 축 위에 놓인다. 임의의 벡터  $v$ 는 다음과 같이 세 벡터  $i, j, k$ 의 선형결합으로 쉽게 나타낼 수 있다.

$$\text{벡터 형태 : } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

$$\text{행렬 형태 : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

위와 같은 행렬이  $3 \times 3$  항등행렬<sup>1</sup>  $I$ 이다. 모든 벡터에 항등행렬  $I$ 를 곱하면 벡터는 변하지 않는다

<sup>1</sup> (편집자) 주대각성분이 모두 1이고 그 외의 성분은 모두 0인 행렬을 항등행렬이라 한다.



다. 모든 벡터  $v$ 에 대해  $Iv = v$ 이므로, 항등행렬  $I$ 는 숫자 1의 역할을 한다.

한편, 2차원 벡터  $v$ 와 3차원 벡터  $w$ 의 선형결합은 얻을 수 없다는 점에 유의해야 한다. 왜냐하면 2차원 벡터  $v$ 와 3차원 벡터  $w$ 는 같은 공간에 있지 않기 때문이다.

## 평면인지 어떻게 알 수 있을까?

$v$ 와  $w$ 가 각각 3개의 성분을 가진 영벡터가 아닌 벡터라 가정하자. 두 벡터가 선형독립이라 가정하면 이들은 서로 다른 방향을 가리킨다(즉  $w$ 는  $cv$ 가 아니다). 그러면 두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 선형결합은 3차원 공간 내부의 평면을 채운다. 두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 선형결합이 평면을 만든다는 것을 알 수 있는 방법은 다음과 같다.

임의의 두 선형결합  $cv + dw$ 와  $Cv + Dw$ 를 살펴보자. 두 벡터의 중점은  $h = \frac{1}{2}(c + C)v + \frac{1}{2}(d + D)w$ 이며, 이는 두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 또 다른 선형결합이다. 따라서 이 표면은 '표면 위에 있는 임의의 두 점의 중점은 표면 위의 또 다른 점  $h$ 이다'라는 평면의 기본 성질을 만족한다. 즉 이 표면은 평면이어야 한다.

이 추론이 완벽하지 않을 수도 있다. 단지 평면의 성질에 대한 직관에 의존했기 때문이다. 이와 관련한 또 다른 증명은 1.2절에서 확인해보자.

## 1.1 연습문제

1.  $a, b, c, d$ 가 어떤 조건을 만족할 때  $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 가  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 의  $m$ 배가 되는가? 두 방정식  $c = ma, d = mb$ 로 시작하자.  $m$ 을 소거함으로써  $a, b, c, d$ 가 모두 포함된 하나의 식을 찾으라. 단,  $a, b, c, d$ 는 모두 0이 아니라고 가정한다.
2. 점  $(0, 0)$ 에서 점  $(5, 0)$ 으로, 점  $(5, 0)$ 에서 점  $(0, 12)$ 로, 점  $(0, 12)$ 에서 점  $(0, 0)$ 으로 돌아가면서 삼각형 주위를 돌 때 만들어지는 세 벡터  $u, v, w$ 를 구하라. 그리고  $u + v + w$ 와 각 벡터의 길이  $\|u\|, \|v\|, \|w\|$ 를 구하라. 참고로 벡터  $u = (u_1, u_2)$ 의 길이 제곱은  $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2$ 이다.



※ [문제 3~10]은 벡터의 합과 선형결합에 관한 문제이다.

3. 다음과 같은 벡터의 선형결합을 (선, 평면 또는  $\mathbb{R}^3$ 을 이용해) 기하학적으로 설명하라.

(a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. 두 벡터  $v = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $w = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 와  $v+w$ ,  $v-w$ 를  $xy$ -평면 위에 그려라.

5.  $v+w = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이고  $v-w = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ 일 때,  $v$ ,  $w$ 를 구하고, 각 벡터를 그려라.

6.  $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이고  $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 일 때,  $3v+w$ 와  $cv+dw$ 를 구하라.

7.  $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $w = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ 일 때,  $u+v+w$ 와  $2u+2v+w$ 를 구하라.  $u$ ,  $v$ ,  $w$ 가 하

나의 평면 위에 있다는 것은 어떻게 알 수 있는가? 사실  $w=cu+dv$ 이면 이 세 벡터는 하나의 평면 위에 있음을 알 수 있다. 이때  $c$ ,  $d$ 를 구하라.

8. 두 벡터  $v=(1, -2, 1)$ 과  $w=(0, 1, -1)$ 에 대해 모든 선형결합  $cv+dw$ 의 성분들의 합이 0이 되는 이유는  $v$ 와  $w$ 의 성분들의 합이 각각 0이 되기 때문이다.  $cv+dw=(3, 3, -6)$ 이 되는  $c$ ,  $d$ 를 구하라. 왜 두 벡터  $v$ ,  $w$ 의 선형결합으로  $(3, 3, 6)$ 은 만들 수 없는가?

9.  $xy$ -평면 위에 다음 9가지의 선형결합을 모두 나타내라.

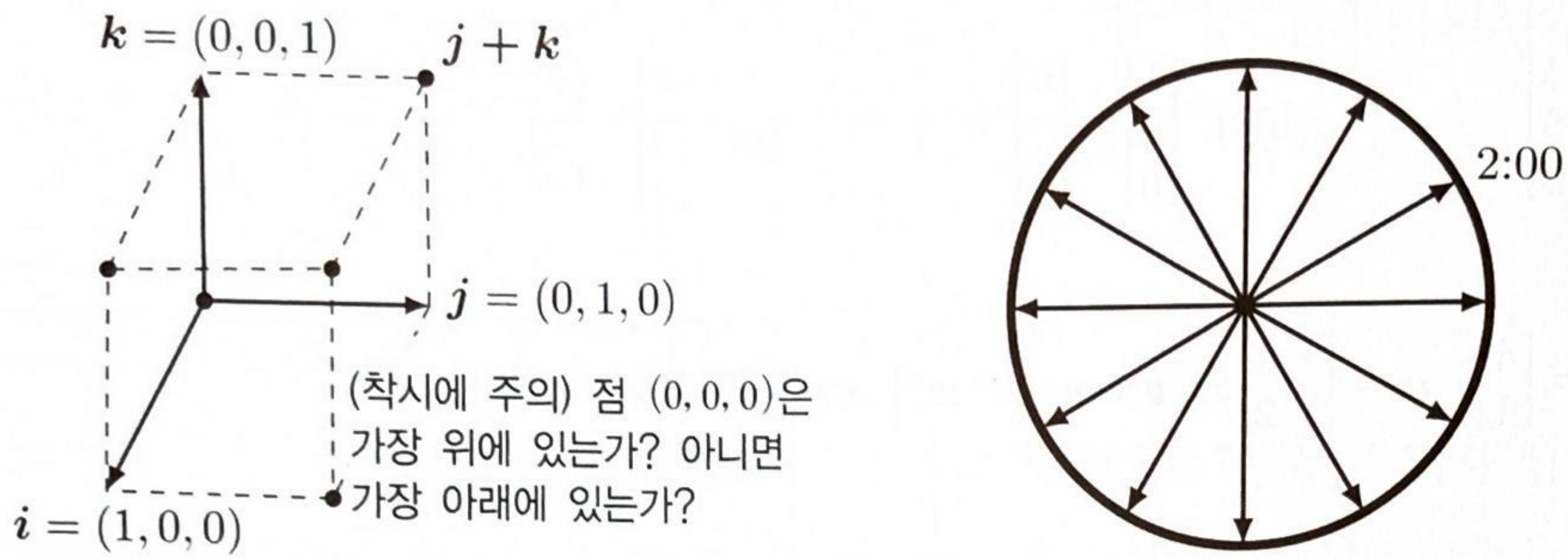
$$c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c=0, 1, 2, d=0, 1, 2$$

10. (만만치 않은 문제) 세 벡터  $u=(1, 1, 0)$ ,  $v=(0, 1, 1)$ ,  $w=(a, b, c)$ 가 선형독립인지, 선형종속인지를 어떻게 결정할 수 있는가?

11. 평행사변형의 세 꼭짓점의 좌표가  $(1, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(1, 3)$ 일 때, 네 번째 꼭짓점으로 가능한 3가지 점의 좌표를 구하라. 또한 각 경우에 가능한 3개의 평행사변형을 그려라.



※ [문제 12~15]는 [그림 1.1]의 정육면체와 시계 위의 특별한 벡터에 관한 문제이다.

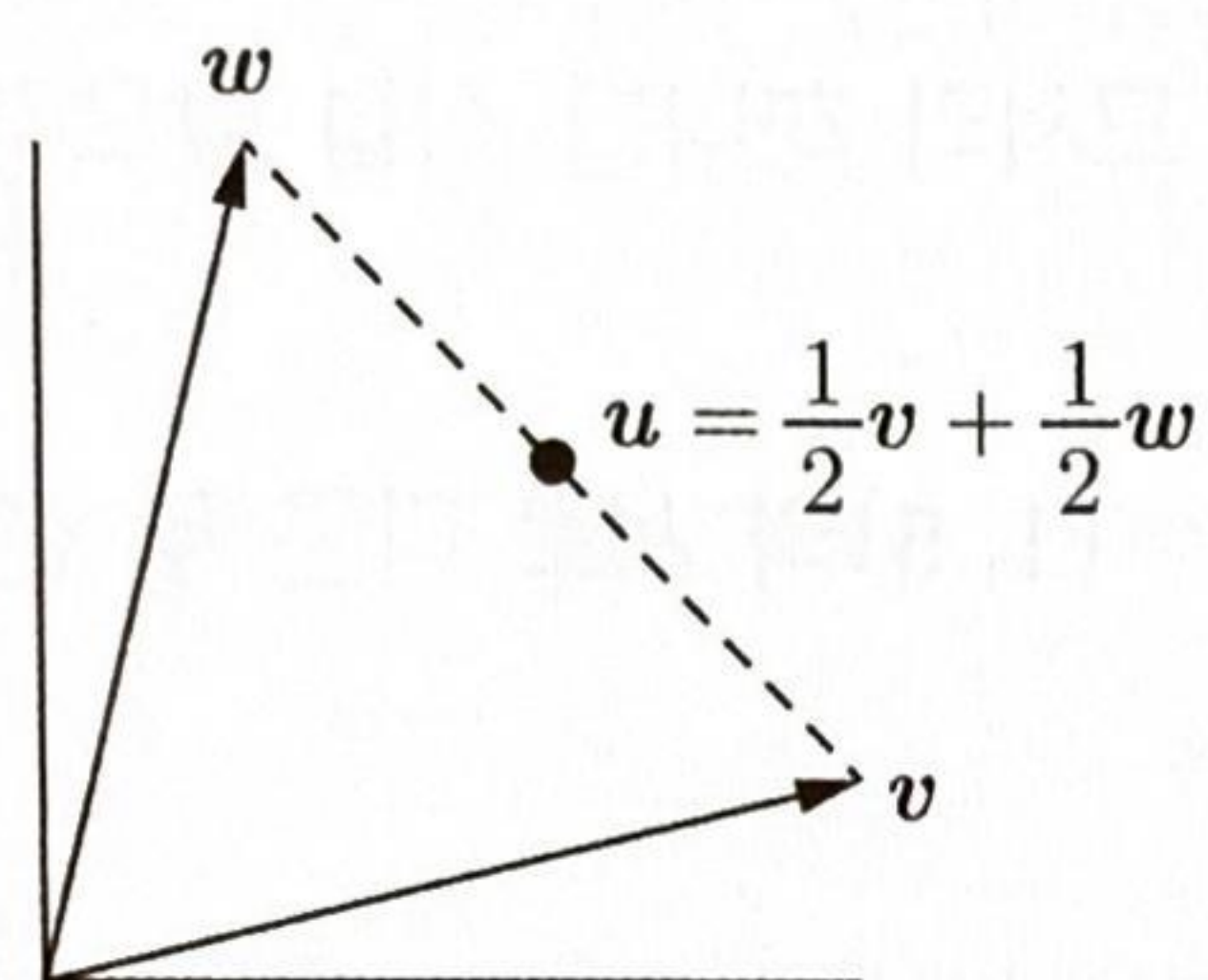


[그림 1.1]  $i, j, k$ 로 만들어진 정육면체와 12개의 시계 벡터 : (모든 벡터의 길이) = 1

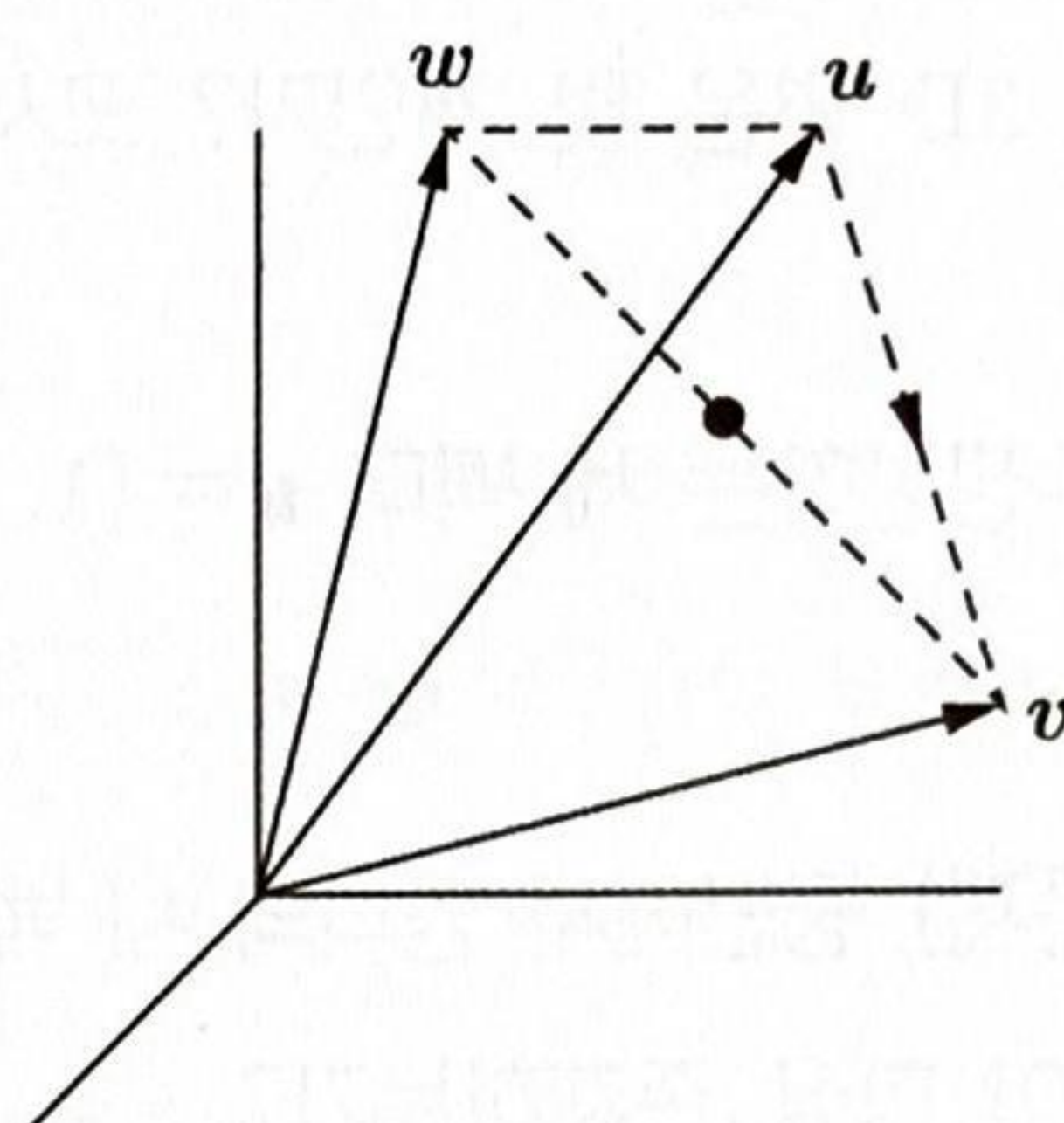
12. 점  $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 은 [그림 1.1]의 정육면체의 네 꼭짓점이다. 나머지 네 꼭짓점의 좌표는 무엇인가? 또한 정육면체의 중심점의 좌표를 구하고, 여섯 면의 중심점의 좌표를 각각 구하라. 정육면체의 모서리는 몇 개인가?
13. (복습문제)  $xyz$ -공간에서  $i = (1, 0, 0)$ 와  $i + j = (1, 1, 0)$ 의 모든 선형결합이 있는 평면은 어디에 있는가?
14. 다음 물음에 답하라.
  - (a) 시계의 중심에서 1시, 2시, ..., 12시까지 가는 12개 벡터의 합  $V$ 는 무엇인가?
  - (b) 2시 벡터가 제거되면 나머지 11개 시계 벡터의 합은 왜 8시 벡터가 되는가?
  - (c) 2시 벡터의 성분은  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ 인가? 이때  $\theta$ 는 무엇인가?
15. 12개의 벡터가 중심  $(0, 0)$ 이 아닌 하단의 6시부터 시작한다고 가정하자. 12시로 향하는 벡터는  $(0, 2)$ 로 2배가 된다. 새로운 12개 벡터의 합은 무엇이 되는가?
16. 선형결합  $cu + dv + ew$ 가 직선 하나만을 채우는 경우의 세 벡터  $u, v, w$ 를 그려라. 또한 선형결합  $cu + dv + ew$ 가 평면 하나만을 채우는 경우의 세 벡터  $u, v, w$ 를 3차원 공간에서 찾으라.
17. 어떤 선형결합  $c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이  $\begin{bmatrix} 14 \\ 8 \end{bmatrix}$ 을 만드는가? 이 질문을  $c, d$ 를 구하는 두 방정식으로 표현하라.



※ [문제 18~19]는 두 벡터  $v, w$ 의 선형결합에 관한 문제이다([그림 1.2(a)] 참고).



(a) [문제 18~19]에 관한 평면



(b) [문제 20~23]에 관한 3차원 공간

[그림 1.2] [문제 18~23]에 관한 그림

18. [그림 1.2(a)]는  $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$ 를 보여준다. 그림 위에  $\frac{3}{4}v + \frac{1}{4}w$ ,  $\frac{1}{4}v + \frac{1}{4}w$ ,  $v + w$ 의 좌표를 표시하라. 또한  $c + d = 1$ 일 때, 모든 선형결합  $cv + dw$ 를 나타내는 직선을 그려라.
19.  $0 \leq c \leq 1$ ,  $0 \leq d \leq 1$ 인 영역에서 모든 선형결합  $cv + dw$ 를 색칠하여 나타내라. 또한  $c \geq 0$ ,  $d \geq 0$ 인 영역에서 모든 선형결합  $cv + dw$ 가 만드는 원뿔(cone) 모양을 그려라.

※ [문제 20~23]은 3차원 공간에서 벡터  $u, v, w$ 를 다루는 문제이다([그림 1.2(b)] 참고).

20. [그림 1.2(b)] 위에  $\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}w$ 와  $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ 를 표시하라.

(탐구할 만한 문제)  $c, d, e$ 가 어떤 조건을 만족할 때, 선형결합  $cu + dv + ew$ 가 [그림 1.2(b)]의 점선으로 만들어진 삼각형을 채울 수 있는가? 참고로 삼각형을 채우기 위한 하나의 조건은  $c \geq 0$ ,  $d \geq 0$ ,  $e \geq 0$ 이다.

21. [그림 1.2(b)]의 삼각형의 세 점선은  $v - u$ ,  $w - v$ ,  $u - w$ 이다. 이들의 합은 무엇인가? 벡터의 머리부터 꼬리까지 잇는 방식으로 삼각형의 주위에  $(3, 1) + (-1, 1) + (-2, -2)$ 를 그려라.
22.  $c \geq 0$ ,  $d \geq 0$ ,  $e \geq 0$ 이고  $c + d + e \leq 1$ 일 때, 선형결합  $cu + dv + ew$ 로 만든 피라미드를 음영 처리하여 나타내라. 그리고  $\frac{1}{2}(u + v + w)$ 를 이 피라미드의 안쪽 또는 바깥쪽에 표시하라.
23. 세 벡터  $u, v, w$ 의 모든 선형결합을 살펴봤을 때,  $cu + dv + ew$ 로 만들어지지 않는 벡터가 있는가? 앞의 질문에 대한 답과 다른 결과를 얻으려면  $u, v, w$ 가 어떤 조건을 만족해야 하는가?



## 도전문제

24. 모서리의 길이가 2인 정육면체는 4차원 공간에서 몇 개의 꼭짓점  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ 을 갖는가? 부피는 얼마인가? 3D 면은 몇 개인가? 모서리는 몇 개인가? 모서리 하나를 직접 찾으라.
25. 벡터  $b = (0, 1)$ 을 생성하는 세 벡터  $u = (1, 3)$ ,  $v = (2, 7)$ ,  $w = (1, 5)$ 의 서로 다른 두 선형결합을 찾으라.
- (조금 까다로운 문제) 평면에서 임의의 세 벡터  $u$ ,  $v$ ,  $w$ 를 취하면 벡터  $b = (0, 1)$ 을 생성하는 서로 다른 두 선형결합이 항상 존재하는가?
26.  $v = (a, b)$ ,  $w = (c, d)$ 의 선형결합이 항상 평면을 생성하는 조건은 무엇인가? 선형결합  $cu + dv + ew + fz$ 가 4차원 공간의 모든 벡터를 생성할 수 있도록 4개의 0이 아닌 성분을 갖는 4개의 벡터  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $z$ 를 찾으라.
27.  $cu + dv + ew = b$ 를 만족하는  $c$ ,  $d$ ,  $e$ 를 구하는 3개의 방정식을 작성하라. 이 식을 행렬방정식  $Ax = b$ 의 형태로 나타내라.  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $b$ 가 다음과 같이 주어질 때, 주어진 방정식을 만족하는  $c$ ,  $d$ ,  $e$ 를 구할 수 있는가?

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 1.2 내적으로부터의 길이와 각

1.  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 와  $w = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ 의 내적은  $v \cdot w = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 4 + 12 = 16$ 이다.
2.  $v = (1, 3, 2)$ 의 길이 제곱은  $v \cdot v = 1 + 9 + 4 = 14$ 이고, 길이는  $\|v\| = \sqrt{14}$ 이다.
3.  $v = (1, 3, 2)$ 는  $w = (4, -4, 4)$ 와 수직이다. 왜냐하면  $v \cdot w = 0$ 이기 때문이다.
4.  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 과  $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 의 사잇각  $\theta$ 는  $45^\circ$ 이므로  $\cos \theta = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}}$ 이다.
5. 모든 각  $\theta$ 에 대해  $|\cos \theta| \leq 1$ 이다. 모든 벡터에 대해 다음이 성립한다.

❶ 슈바르츠 부등식(Schwarz inequality) :  $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$

❷ 삼각부등식(triangle inequality) :  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$



벡터  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 와  $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ 의 가장 유용한 곱셈은 **내적**  $v \cdot w$ 이다. 먼저 각 벡터의 첫 번째 성분들을 곱하는  $v_1 w_1$ 과 두 번째 성분들을 곱하는  $v_2 w_2$ 를 계산한다. 그다음 이들을 더하여  $v \cdot w$ 를 얻는다.

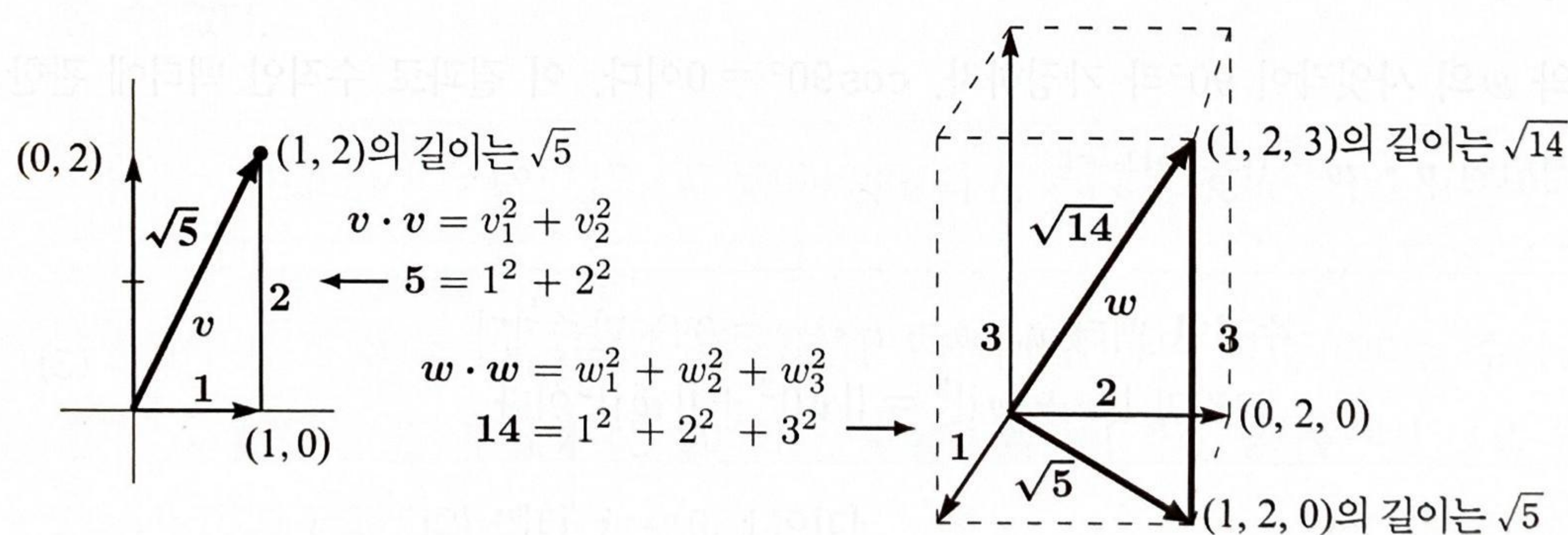
$$\text{벡터 } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{와 } w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \text{의 내적은 } v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 \text{이다.} \quad (1)$$

$n$ 개의 성분을 갖는 벡터  $v, w$ 가  $n$ 차원 공간에 있을 때 내적은 다음과 같다.

$$v, w \text{의 내적은 } v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = w \cdot v \text{이다.} \quad (2)$$

내적  $v \cdot v$ 는 벡터  $v$ 의 길이 제곱  $\|v\|^2 = v_1^2 + \cdots + v_n^2$ 이다. 2차원에서 이 식은 직각삼각형에 대한 피타고라스 정리  $a^2 + b^2 = c^2$ 과 같다. 두 변은  $a^2 = v_1^2$ 과  $b^2 = v_2^2$ 에 해당하고, 직각삼각형의 빗변 길이의 제곱은  $\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 = a^2 + b^2$ 이다.

$n$ 차원에 도달하기 위해 한 번에 하나의 차원을 추가할 수 있다. [그림 1.3]은 2차원에서의 벡터  $v = (1, 2)$ 와 3차원에서의 벡터  $w = (1, 2, 3)$ 을 보여준다. [그림 1.3]의 오른쪽 그림에 있는 직각삼각형은  $(1, 2, 0)$ 과  $(0, 0, 3)$ 을 꼭짓점으로 갖는다. 이 두 벡터를 합치면  $w$ 가 된다. 첫 번째 변은  $xy$ -평면 위에 있고, 두 번째 변은  $z$ 축을 따라 올라간다. 빗변이  $w = (1, 2, 3)$ 인 이 삼각형의 경우, 피타고라스 정리  $a^2 + b^2 = c^2$ 은  $(1^2 + 2^2) + 3^2 = 14 = \|w\|^2$ 이 된다.



[그림 1.3] 평면에서  $v$ 의 길이는  $\sqrt{v \cdot v} = \sqrt{5}$ , 3차원 공간에서  $w$ 의 길이는  $\sqrt{w \cdot w} = \sqrt{14}$

4차원 벡터  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ 의 길이는  $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}$ 이다. 그러므로 벡터  $(1, 1, 1, 1)$ 의 길이는  $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2$ 이다. 이는 4차원 공간에서 정육면체를 통과하는 대각선의 길이이다.  $n$ 차원 공간에서의 대각선의 길이는  $\sqrt{n}$ 이다.



길이가 1인 벡터를 **단위벡터**(unit vector)라 한다. 벡터  $v$ 를  $\|v\|$ 로 나누면 단위벡터가 된다.

단위벡터  $u$ 의 길이는  $\|u\| = 1$ 이다. 만약 벡터  $v \neq 0$ 이면  $u = \frac{v}{\|v\|}$ 는 단위벡터이다.

**EX 1**  $x$ 축 위에 있는 **표준단위벡터**(standard unit vector)는  $i$ 로 표기한다.  $xy$ -평면 위에서  $x$ 축과 각  $\theta$ 를 이루는 단위벡터는  $(\cos \theta, \sin \theta)$ 이다. 즉 다음이 성립한다.

단위벡터  $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 과  $u = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ 에 대해  $i \cdot u = \cos \theta$ 이다.

$u \cdot u = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 이므로,  $u = (\cos \theta, \sin \theta)$ 는 단위벡터이다.

4차원 공간에서 단위벡터의 한 예는  $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이다. 혹은 벡터  $v = (1, 5, 5, 7)$ 로 시작해 생각해볼 수도 있다. 이 경우  $\|v\|^2 = 1 + 25 + 25 + 49 = 100$ 이다. 따라서 벡터  $v$ 의 길이는 10이고  $u = \frac{v}{10}$ 는 단위벡터이다.

‘단위(unit)’라는 용어는 측정값이 항상 ‘1’과 같음을 의미한다. 예를 들어 단위가격(unit price)은 한 품목에 대한 가격이다. 단위정육면체(unit cube)의 모서리 길이는 1이다. 단위원(unit circle)은 반지름이 1인 원이다. 이제 ‘단위벡터’의 길이가 1임을 알 수 있다.

## 수직인 벡터

두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 사잇각이  $90^\circ$ 라 가정하자.  $\cos 90^\circ = 0$ 이다. 이 결과로 수직인 벡터에 관한 유용한 판정법인  $v \cdot w = 0$ 을 얻는다.

수직인 벡터  $v, w$ 는  $v \cdot w = 0$ 을 만족한다.  
그러면  $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ 이다.

(3)

이를 통해 다시 각  $90^\circ$ 와 길이  $a^2 + b^2 = c^2$ 을 연결해 생각할 수 있다. 즉 수직인 벡터 ( $v \cdot w = 0 = w \cdot v$ )의 경우 다음과 같이 쉽게 계산할 수 있다.

$$\|v + w\|^2 = (v + w) \cdot (v + w) = v \cdot v + v \cdot w + w \cdot v + w \cdot w = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad (4)$$

위 식에서 두 항  $v \cdot w$ 와  $w \cdot v$ 는 0이다. 마찬가지로  $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ 도 성립한다.



**EX 2** 벡터  $v = (1, 1)$ 은  $x$ 축과 각  $45^\circ$ 를 이룬다. 벡터  $w = (1, -1)$ 은  $x$ 축과 각  $-45^\circ$ 를 이룬다. 벡터  $v + w$ 는  $(2, 0)$ 이고,  $v - w$ 는  $(0, 2)$ 이다. 두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 사잇각은  $90^\circ$ 이다. 내적은  $v \cdot w = 1 - 1 = 0$ 이다. 따라서 두 벡터  $v, w$ 로 이루어진 직각삼각형의 변의 길이는  $\|v\|^2 = 2$ ,  $\|w\|^2 = 2$ 이고,  $\|v - w\|^2 = \|v + w\|^2 = 4$ 이다.

**EX 3** 두 벡터  $v = (4, 2)$ 와  $w = (-1, 2)$ 의 내적은 0이다.

$$\begin{array}{l} \text{내적이 0} \\ \text{(두 벡터는 수직)} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 + 4 = 0$$

점  $x = -1$ (0의 왼쪽)에 4의 가중치를, 점  $x = 2$ (0의 오른쪽)에 2의 가중치를 두자.  $x$ 축은 시소처럼 중심에서 균형을 잡는다. 두 벡터  $v, w$ 의 내적이  $4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$ 이므로 가중치에 의해 균형을 이룬다.

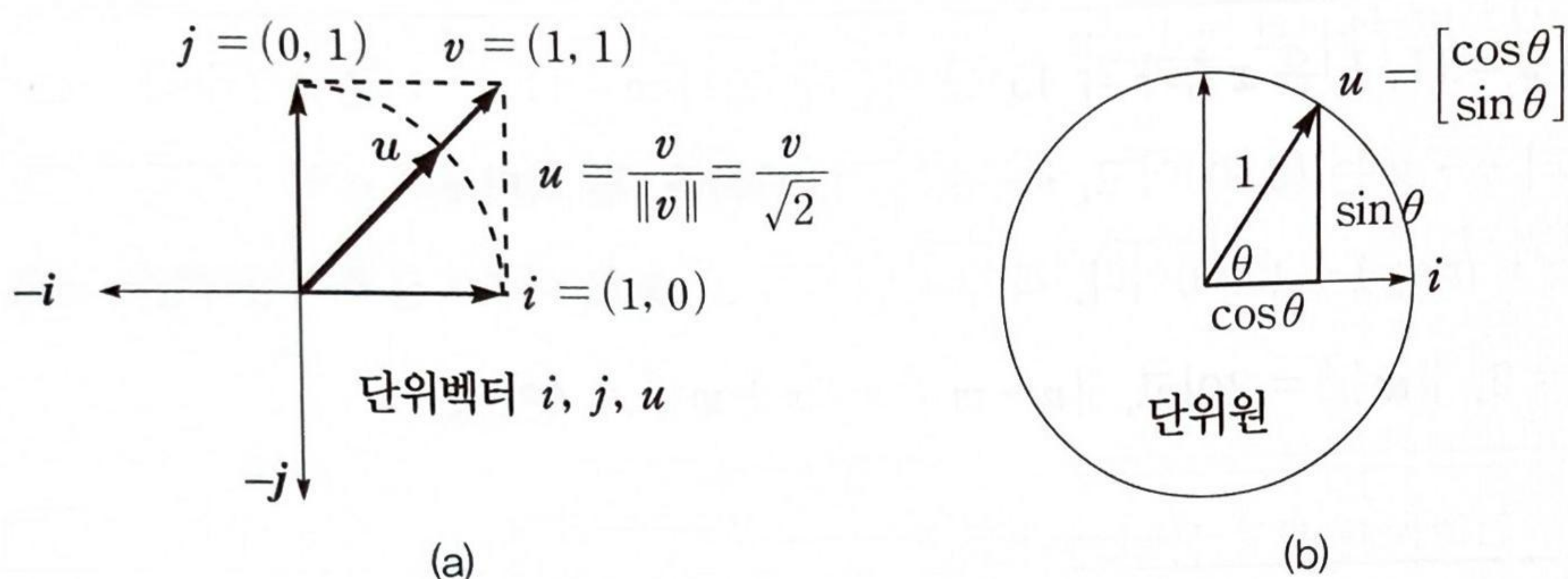
이 결과는 공학과 과학의 전형적인 예이다. 가중치 벡터는  $(w_1, w_2) = (4, 2)$ 이다. 중심으로 부터의 거리 벡터는  $(v_1, v_2) = (-1, 2)$ 이다. 가중치와 거리를 곱한  $w_1v_1$ 과  $w_2v_2$ 는 ‘모멘트’를 제공한다. 시소의 균형을 맞추기 위한 방정식은  $w \cdot v = w_1v_1 + w_2v_2 = 0$ 이다.

**EX 4** 단위벡터  $v = (1, 0)$ 과  $u = (\cos \theta, \sin \theta)$ 는  $v \cdot u = \cos \theta$ 를 만족한다. 이제 내적을 벡터의 사잇각과 연결해 생각해보자. 단위벡터에 대한 각  $\theta$ 의 코사인 공식은 쉽게 기억할 수 있다.

$\|v\| = 1$ 이고  $\|u\| = 1$ 인 경우, 두 벡터  $v$ 와  $u$ 의 사잇각  $\theta$ 는  $\cos \theta = v \cdot u$ 를 만족한다.

수학에서 0은 항상 특별한 수이다. 두 벡터의 내적이 0인 경우, 이 두 벡터는 수직임을 의미한다. 수직인 두 벡터의 사잇각은  $90^\circ$ 이다. 수직인 벡터의 가장 명확한 예는  $x$ 축 위의 벡터  $i = (1, 0)$ 과  $y$ 축 위의 벡터  $j = (0, 1)$ 이다.





**[그림 1.4]** (a)는 좌표벡터  $i$ 와  $j$ 이다. 단위벡터  $u$ 는  $v = (1, 1)$ 을 길이  $\|v\| = \sqrt{2}$ 로 나눈 것이다. (b)는 단위벡터  $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ 와 벡터  $i$ 의 사이각이  $\theta$ 임을 보여준다.

**EX 5** 내적은 경제와 경영 분야에도 이용된다. 3가지 상품을 구매한다고 하자. 각 상품의 단위가격은  $(p_1, p_2, p_3)$ 이고, 이를 가격 벡터  $p$ 라 하자. 구매하려는 수량은  $(q_1, q_2, q_3)$ 이고, 이를 수량 벡터  $q$ 라 하자. 가격  $p_1$ 으로  $q_1$ 개를 구매하면  $q_1 p_1$ 의 비용이 발생한다. 따라서 총비용은 3차원 공간에서의 수량 벡터  $q$ 와 가격 벡터  $p$ 의 내적이다.

$$(\text{비용}) = (q_1, q_2, q_3) \cdot (p_1, p_2, p_3) = q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 = (\text{내적})$$

내적이 0이면 ‘장부의 균형(수입과 지출의 일치)’을 의미한다.  $q \cdot p = 0$ 이면 총매출액은 총 구매액과 동일하다. 그러면 (3차원 공간에서)  $p$ 와  $q$ 는 수직이다. 이 문제를 수천 개의 상품이 있는 슈퍼마켓으로 생각하면 빠르게 고차원으로 이동한다.

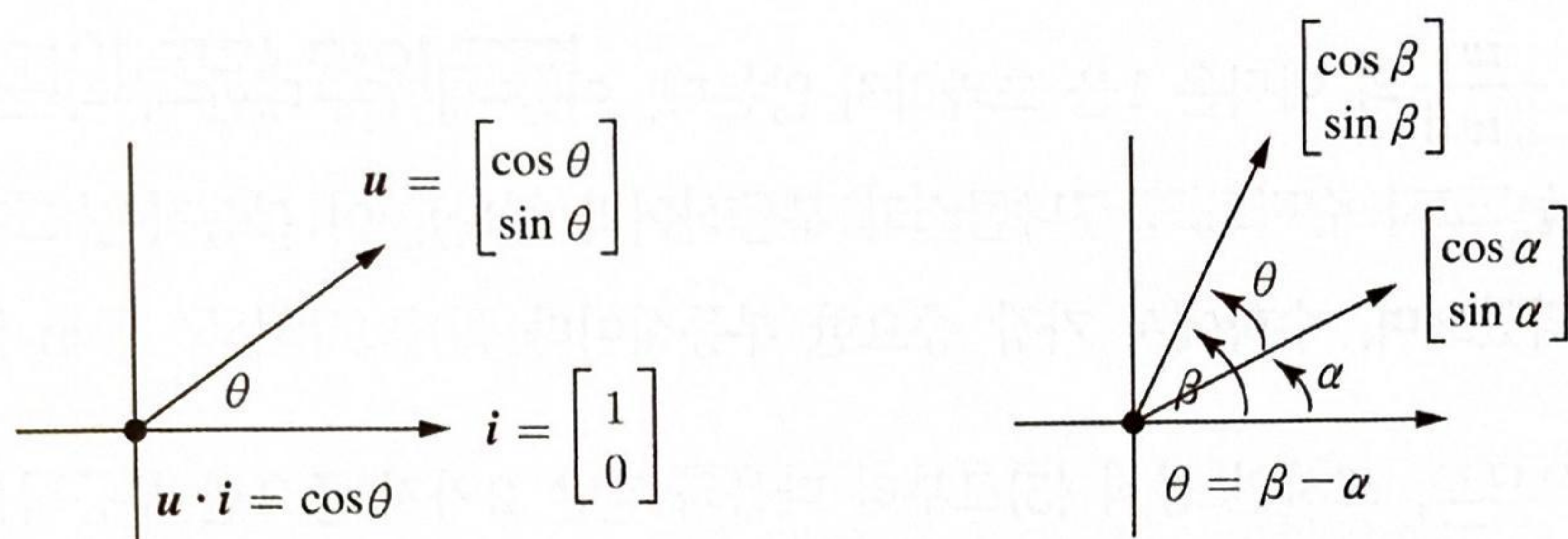
스프레드시트는 자료를 관리하는 데 필수이다. 스프레드시트를 이용하면 선형결합과 내적을 계산할 수 있다. 이때 화면에 보이는 것은 행렬이다.

## 두 벡터의 사이각

수직인 두 벡터  $v, w$ 는  $v \cdot w = 0$ 을 만족한다. 두 벡터의 사이각이  $90^\circ$ 일 때 내적은 0이다. 다음 단계는 모든 내적을 사이각과 연결하는 것이다. 내적  $v \cdot w$ 는 영벡터가 아닌 두 벡터  $v$ 와  $w$ 의 사이각을 알려준다.

**EX 6** 단위벡터  $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ 와  $w = (\cos\beta, \sin\beta)$ 의 내적은  $\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ 이다. 삼각법(trigonometry)에서 이 식은  $\cos(\beta - \alpha)$ 에 대한 식이다. [그림 1.5]는 단위벡터  $v$ 와  $w$ 의 사이각을 보여준다. 내적  $w \cdot v$ 는  $v \cdot w$ 와 같다. 즉  $v$ 와  $w$ 의 순서는 상관없다.

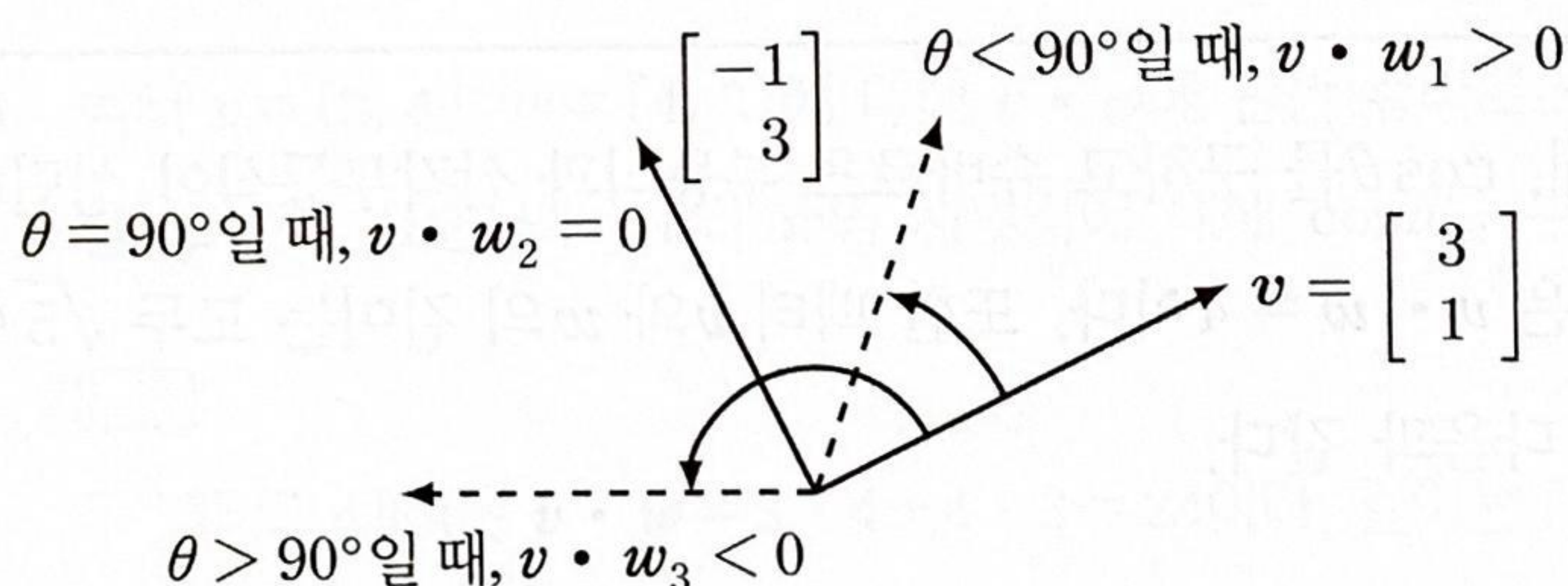




[그림 1.5] 두 단위벡터의 내적 :  $u \cdot i = \cos \theta$ . 두 벡터의 사잇각은  $\theta$ 이다.

$v \cdot w$ 가 0이 아니라고 가정하자.  $v \cdot w$ 는 양수일 수도 있고 음수일 수도 있다.  $v \cdot w$ 의 부호는 사잇각이 직각보다 큰지 또는 작은지를 바로 알려준다.  $v \cdot w$ 가 양수일 때 사잇각은  $90^\circ$  미만이다.  $v \cdot w$ 가 음수일 때 사잇각은  $90^\circ$  초과이다.

양수와 음수의 경계선은 벡터가  $v$ 와 수직인 경우이다. 양수와 음수의 경계선에 있는 벡터  $w_2 = (1, -3)$ 은  $v = (3, 1)$ 과 수직이다. 이 경우 두 벡터의 내적은 0이다. 벡터  $w_3$ 와 벡터  $v$ 의 사잇각은  $90^\circ$  초과이다. 이 경우 부호 판정법은  $v \cdot w_3 < 0$ 으로 음수가 된다.



[그림 1.6] 예각  $v \cdot w_1 > 0$ , 직각  $v \cdot w_2 = 0$ , 둔각  $v \cdot w_3 < 0$

내적은 두 벡터의 사잇각  $\theta$ 가 무엇인지 정확히 알려준다. 단위벡터  $u$ 와  $U$ 의 내적  $u \cdot U$ 는  $\cos \theta$ 이다. 이 결과는  $n$ 차원에서도 그대로 유지된다.

$\cos \theta$ 은 1보다 크지 않고  $-1$ 보다 작지 않다. 따라서 두 단위벡터의 내적은  $-1$ 보다 크거나 같고, 1보다 작거나 같다.  $\theta$ 의 코사인 값은  $u \cdot U$ 와 같다.

만약  $v$ 와  $w$ 가 단위벡터가 아니면 어떻게 계산해야 할까? 두 벡터를 벡터의 길이로 나누면  $u = \frac{v}{\|v\|}$ ,  $U = \frac{w}{\|w\|}$ 를 얻는다. 단위벡터  $u$ 와  $U$ 의 내적은  $\cos \theta$ 이다.

**코사인 공식(cosine formula)**  $v$ 와  $w$ 가 영벡터가 아닐 때,  $\frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \cos \theta$ 이다. (5)



사잇각과 관계없이  $\frac{v}{\|v\|}$ 와  $\frac{w}{\|w\|}$ 의 내적은 1을 초과하지 않는다. 이를 내적에 대한 ‘슈바르츠 부등식’이라 한다(더 정확히는 코시-슈바르츠-부냐코프스키 부등식이라 한다). 이 부등식은 프랑스, 독일, 러시아에서 발견되었으며, 수학에서 가장 중요한 부등식이다.

$|\cos \theta|$ 는 1을 초과하지 않으므로, 코사인 공식 (5)로부터 다음과 같은 2가지 중요한 부등식을 얻을 수 있다.

|                                     |                                                                  |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| <b>슈바르츠 부등식</b><br><br><b>삼각부등식</b> | $ v \cdot w  \leq \ v\  \ w\ $<br>$\ v + w\  \leq \ v\  + \ w\ $ |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------|

삼각부등식은 슈바르츠 부등식으로부터 유도할 수 있다.

$$\|v + w\|^2 = v \cdot v + v \cdot w + w \cdot v + w \cdot w \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 \quad (6)$$

식 (6)의 양변에 루트를 취하면  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ 가 된다. 따라서 삼각형에서 어떤 두 변의 길이의 합은 나머지 변의 길이를 초과할 수 없다. 즉 (변3)은 (변1) + (변2)를 초과할 수 없다.

**EX 7**  $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 일 때,  $\cos \theta$ 를 구하고 슈바르츠 부등식과 삼각부등식이 성립하는지 확인해보자. 두 벡터의 내적은  $v \cdot w = 4$ 이다. 또한 벡터  $v$ 와  $w$ 의 길이는 모두  $\sqrt{5}$ 이므로  $\|v\| \|w\| = 5$ 이다. 따라서 다음과 같다.

$$\cos \theta = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \frac{4}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

슈바르츠 부등식은  $4 < 5$  형태로 성립한다. 삼각부등식에 의해 (변3) =  $\|v + w\|$ 는 (변1) + (변2)보다 작다.  $v + w$ 의 좌표를 (3, 3)이라 하면 삼각부등식은  $\sqrt{18} < \sqrt{5} + \sqrt{5}$ 이다. 양변을 제곱하면  $18 < 20$ 이므로, 삼각부등식이 성립함을 확인할 수 있다.

**EX 8** 두 벡터  $v = (a, b)$ 와  $w = (b, a)$ 의 내적은  $2ab$ 이다. 또한 두 벡터의 길이는  $\|v\| = \|w\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이다. 슈바르츠 부등식  $v \cdot w \leq \|v\| \|w\|$ 는  $2ab \leq a^2 + b^2$ 이다.

임의의 수  $a^2$ 과  $b^2$ 에 대해  $|ab|$ (기하평균)  $\leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (산술평균)이므로, 슈바르츠 부등식을 확인할 수 있다. 위 식은  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - ab = \frac{1}{2}(a - b)^2$ 이 완전제곱수(절대 음수가 아님)이므로 증명된다.



### 3차원 공간 안의 평면

3개의 성분  $n_1, n_2, n_3$ 를 가진 단위벡터  $\mathbf{n}$ 을 가정해보자. 그리고  $\mathbf{n}$ 과 수직인  $\mathbb{R}^3$  안의 모든 벡터  $\mathbf{w}$ 를 생각해보자(즉  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ ).

$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ 인 벡터  $\mathbf{w}$ 가  $\mathbb{R}^3$  안의 2차원 평면을 채운다.

모든 평면은 '법선벡터  $\mathbf{n}$ '과 수직이다. 따라서 3차원 공간에서 2차원 평면의 방정식은  $n_1 w_1 + n_2 w_2 + n_3 w_3 = 0$ 이다. 'xy-평면'의 경우 위쪽으로 똑바로 올라가는 법선벡터  $\mathbf{n}$ 은 0, 0, 1을 성분으로 갖는다. 따라서 xy-평면의 방정식은 이미 알고 있는  $w_3 = 0$  또는  $z = 0$ 이다.

## 1.2 확인문제

1.2A 벡터  $\mathbf{v} = (3, 4)$ ,  $\mathbf{w} = (4, 3)$ 에 대해  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ 에 관한 슈바르츠 부등식과  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ 에 관한 삼각부등식을 보여라. 또한 벡터  $\mathbf{v}$ 와  $\mathbf{w}$ 의 사이각에 대해  $\cos \theta$ 를 구하라.

**풀이**

두 벡터의 내적은  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$ 이다. 길이는  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{9+16} = 5$ 이고  $\|\mathbf{w}\| = 5$ 이다. 합  $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (7, 7)$ 의 길이는  $7\sqrt{2} < 10$ 이다.

슈바르츠 부등식

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \Rightarrow 24 < 25$$

삼각부등식

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \Rightarrow 7\sqrt{2} < 5 + 5$$

각의 코사인

$$\cos \theta = \frac{24}{25} \Rightarrow \theta \text{는 } \mathbf{v} = (3, 4) \text{에서 } \mathbf{w} = (4, 3) \text{까지의 예각}$$

1.2B 어떤 벡터  $\mathbf{v}$ 와  $\mathbf{w}$ 가 등식  $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ 와  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ 를 만족하는가?

**풀이**

주어진 등식이 성립하는 경우는 하나의 벡터가 다른 벡터의 배수  $\mathbf{w} = c\mathbf{v}$ 일 때이다. 그러면 벡터의 사이각은  $0^\circ$  또는  $180^\circ$ 이다. 이 경우  $|\cos \theta| = 1$ 이고  $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$ 이다.  $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}$ 인 경우와 같이 사이각이  $0^\circ$ 이면  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ 이다(즉 양변이 모두  $3\|\mathbf{v}\|$ 이다). 이 삼각형은 평평하다.  $\mathbf{v}$ ,  $2\mathbf{v}$ ,  $3\mathbf{v}$ 로 이루어진 삼각형은 하나의 직선이 되므로 만들어지지 않는다.



- 1.2C 벡터  $v = (3, 4)$  방향의 단위벡터  $u$ 를 구하라. 또  $u$ 와 수직인 단위벡터  $U$ 를 구하라. 참고로  $U$ 는 2가지 답이 가능하다.

**풀이**

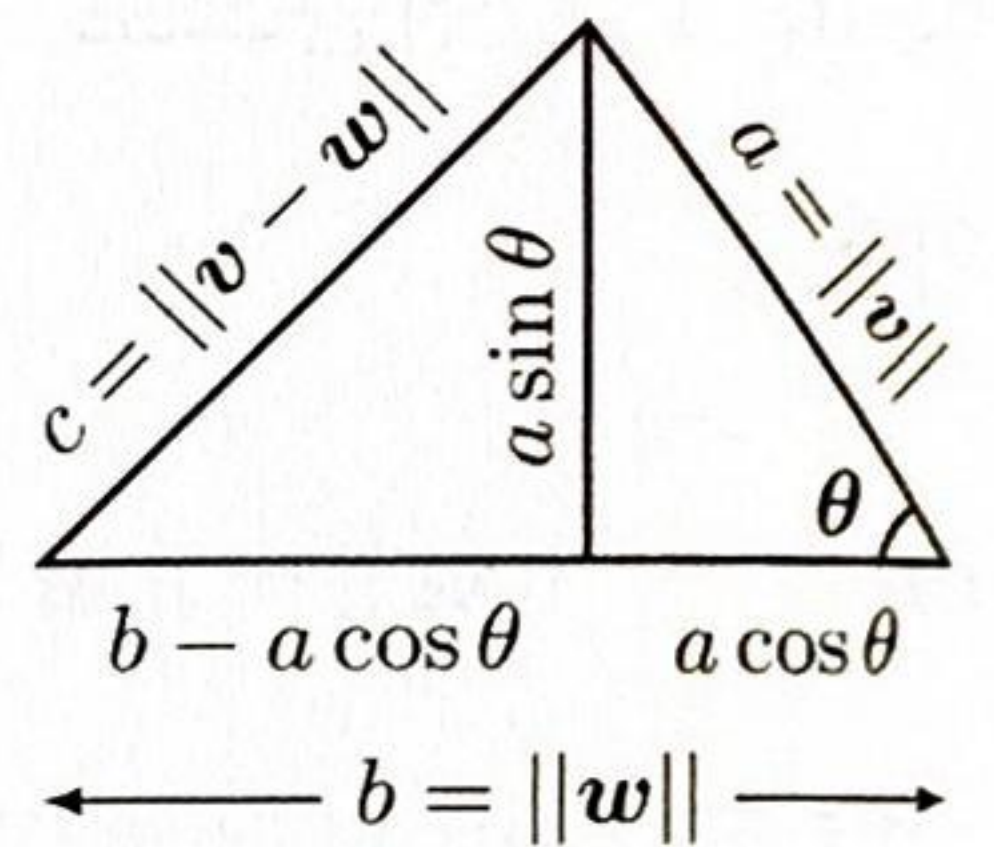
단위벡터  $u$ 는 벡터  $v$ 를 길이  $\|v\| = 5$ 로 나누어 구한다.  $u$ 와 수직인 벡터  $V$ 는  $(-4, 3)$  또는  $(4, -3)$ 이다. 단위벡터  $U$ 는 벡터  $V$ 를 길이  $\|V\| = 5$ 로 나누어 구한다.

- 1.2D 사잇각에 관한 공식  $v \cdot w = \|v\|\|w\|\cos\theta$ 를 설명하고자 한다. 이 식의 우변은 코사인 법칙  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ 에 있는  $ab\cos\theta$ 이다.

**풀이**

오른쪽 삼각형 그림에 대해 피타고라스 정리를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c^2 &= (a \sin \theta)^2 + (b - a \cos \theta)^2 \\ &= a^2 \sin^2 \theta + b^2 - 2ab \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \end{aligned}$$



이 그림은 세 변  $a = \|v\|$ ,  $b = \|w\|$ ,  $c = \|v - w\|$ 와 두 직각삼각형을 보여준다.

$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2v \cdot w$ 와 비교하면  $v \cdot w$  항을  $\|v\|\|w\|\cos\theta$ 로 생각할 수 있다.

## 1.2 연습문제

1. 주어진 벡터에 대해 내적  $u \cdot v$ ,  $u \cdot w$ ,  $u \cdot (v + w)$ ,  $w \cdot v$ 를 구하라.

$$u = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. [문제 1]에 주어진 벡터에 대해 벡터의 길이  $\|u\|$ ,  $\|v\|$ ,  $\|w\|$ 를 구하라. 그리고 슈바르츠 부등식  $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$ 와  $|v \cdot w| \leq \|v\|\|w\|$ 를 확인하라.
3. [문제 1]에 주어진 벡터에 대해  $v$  방향과  $w$  방향의 단위벡터를 각각 구하고, 두 벡터의 사잇각  $\theta$ 의 코사인 값을 구하라. 또 벡터  $w$ 와의 사잇각이 각각  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ 인 벡터  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 를 구하라.
4. 임의의 단위벡터  $v$ ,  $w$ 에 대해 다음 두 벡터의 내적을 구하라.
- (a)  $v$ 와  $-v$
  - (b)  $v + w$ 와  $v - w$
  - (c)  $v - 2w$ 와  $v + 2w$



5. 벡터  $v = (1, 3)$ 과  $w = (2, 1, 2)$  방향의 단위벡터  $u_1, u_2$ 를 구하라. 또 벡터  $u_1, u_2$ 와 수직인 단위벡터  $U_1, U_2$ 를 구하라.
6. 다음 물음에 답하라.
- (a) 벡터  $v = (2, -1)$ 과 수직인 모든 벡터  $w = (w_1, w_2)$ 에 대해 설명하라.
- (b) 벡터  $V = (1, 1, 1)$ 과 수직인 모든 벡터는 3차원 공간에서 어디에 위치하는가?
- (c) 두 벡터  $(1, 1, 1), (1, 2, 3)$  모두와 수직인 벡터는 어디에 위치하는가?
7. 주어진 두 벡터의 사잇각  $\theta$ 를 (코사인을 이용해) 구하라.
- (a)  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$                       (b)  $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- (c)  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$                       (d)  $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$
8. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라(참이면 이유를 제시하고, 거짓이면 반례를 찾으라).
- (a) 벡터  $u = (1, 1, 1)$ 이 벡터  $v, w$ 와 수직이면,  $v$ 는  $w$ 와 평행하다.
- (b) 벡터  $u$ 가  $v, w$ 와 수직이면,  $u$ 는  $v + 2w$ 와 수직이다.
- (c)  $u$ 와  $v$ 가 수직인 단위벡터이면  $\|u - v\|^2 = 2$ 이다.
9.  $(0, 0)$ 부터  $v = (v_1, v_2)$ 까지의 화살표의 기울기는  $\frac{v_2}{v_1}$ 이고,  $(0, 0)$ 부터  $w = (w_1, w_2)$ 까지의 화살표의 기울기는  $\frac{w_2}{w_1}$ 이다. 두 기울기의 곱  $\frac{v_2 w_2}{v_1 w_1}$ 가  $-1$ 이라 가정해보자.  $v \cdot w = 0$ 이고 두 벡터  $v, w$ 가 수직임을 보여라(직선  $y = 4x$ 는  $y = -\frac{1}{4}x$ 와 수직이다).
10.  $(0, 0)$ 부터  $v = (1, 2)$ 까지의 화살표와  $(0, 0)$ 부터  $w = (-2, 1)$ 까지의 화살표를 그려라. 그리고 두 화살표의 기울기를 곱하라. 그 결과가  $v \cdot w = 0$ 임을 보이고, 이에 따라 두 화살표가 서로 어떤 관계인지 설명하라.
11.  $v \cdot w$ 가 음수일 경우, 벡터  $v$ 와  $w$ 의 사잇각에 대해 무엇을 말할 수 있는가? 3차원 벡터  $v$ (화살표)를 그리고,  $v \cdot w < 0$ 인 모든 벡터  $w$ 를 구하라.
12.  $v = (1, 1), w = (1, 5)$ 일 때, 벡터  $w - cv$ 와  $v$ 가 수직이 되게 하는 수  $c$ 를 구하라. 또한 영벡터가 아닌 임의의 벡터  $v, w$ 로부터  $c$ 를 구하는 수식을 구하라.
13. 벡터  $(1, 1, 1, 1)$ 과 수직인 영벡터가 아닌 벡터  $u, v, w$ 를 구하라.



14.  $x = 2$ 와  $y = 8$ 의 기하평균은  $\sqrt{xy} = 4$ 이다. 산술평균은 이보다 더 큰 값으로  $\frac{1}{2}(x + y) =$  \_\_\_\_\_이다. 이 결과는 벡터  $v = (\sqrt{2}, \sqrt{8})$ 과  $w = (\sqrt{8}, \sqrt{2})$ 에 관한 슈바르츠 부등식으로부터 알 수 있다. 벡터  $v$ 와  $w$ 의 사잇각  $\theta$ 에 대해  $\cos \theta$ 를 구하라.

15. 9차원 벡터  $v = (1, 1, \dots, 1)$ 의 크기는 얼마인가? 벡터  $v$ 와 같은 방향의 단위벡터  $u$ 를 구하라. 그리고 벡터  $v$ 와 수직인 단위벡터  $w$ 를 구하라.

16. 벡터  $(1, 0, -1)$ 과 각 축에 대한 단위벡터  $i, j, k$ 의 사잇각  $\alpha, \beta, \theta$ 의 코사인 값을 각각 구하라. 그리고 공식  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \theta = 1$ 을 확인하라.

※ [문제 17~20]은 삼각형에서의 길이와 각에 대한 결과로 이어진다.

17. 벡터  $v = (4, 2)$ 와 벡터  $w = (-1, 2)$ 가 어떤 직각삼각형의 두 변이라 하자. 이 직각삼각형에 대해 다음과 같은 피타고라스 공식  $a^2 + b^2 = c^2$ 이 성립함을 확인하라.

$$(v \text{의 길이})^2 + (w \text{의 길이})^2 = (v + w \text{의 길이})^2$$

18. (내적 규칙) 다음 세 방정식은 간단하지만 유용하다.

- (1)  $v \cdot w = w \cdot v$   
 (2)  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$   
 (3)  $(cv) \cdot w = c(v \cdot w)$

$u = v + w$ 일 때, (1)과 (2)를 이용해  $\|v + w\|^2 = v \cdot v + 2v \cdot w + w \cdot w$ 임을 증명하라.

19. 다음의 코사인 법칙은  $(v - w) \cdot (v - w) = v \cdot v - 2v \cdot w + w \cdot w$ 로부터 유도된다.

$$\text{코사인 법칙} \quad \|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos \theta + \|w\|^2$$

$v, w, v - w$ 를 세 변으로 갖는 삼각형을 그려라. 삼각형의 세 각 중  $\theta$ 에 해당하는 것은 무엇인가?

20. 삼각부등식은 ' $(v + w \text{의 길이}) \leq (v \text{의 길이}) + (w \text{의 길이})$ '와 같다. [문제 18]을 통해  $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2v \cdot w + \|w\|^2$ 임을 확인할 수 있다.  $v \cdot w$  값을 증가시켜  $\|v\|\|w\|$ 와 같게 만들어, ||변3||이 ||변1|| + ||변2||를 초과할 수 없음을 보여라.

$$\text{삼각부등식} \quad \|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \quad \text{또는} \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$



21. 삼각법 대신 대수학에 따른 슈바르츠 부등식  $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$ 에 대해 다음 물음에 답하라.

(a)  $(v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 \leq (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2)$ 의 양변을 모두 전개하라.

(b) 양변의 차이가  $(v_1 w_2 - v_2 w_1)^2$ 이 됨을 보여라. 이는 제곱이므로 음수가 될 수 없어 부등식은 참이 된다.

22. 단위벡터  $u = (u_1, u_2)$ 와  $U = (U_1, U_2)$ 에 대한 부등식  $|u \cdot U| \leq 1$ 의 증명은 다음과 같다.

$$|u \cdot U| \leq |u_1| |U_1| + |u_2| |U_2| \leq \frac{u_1^2 + U_1^2}{2} + \frac{u_2^2 + U_2^2}{2} = 1$$

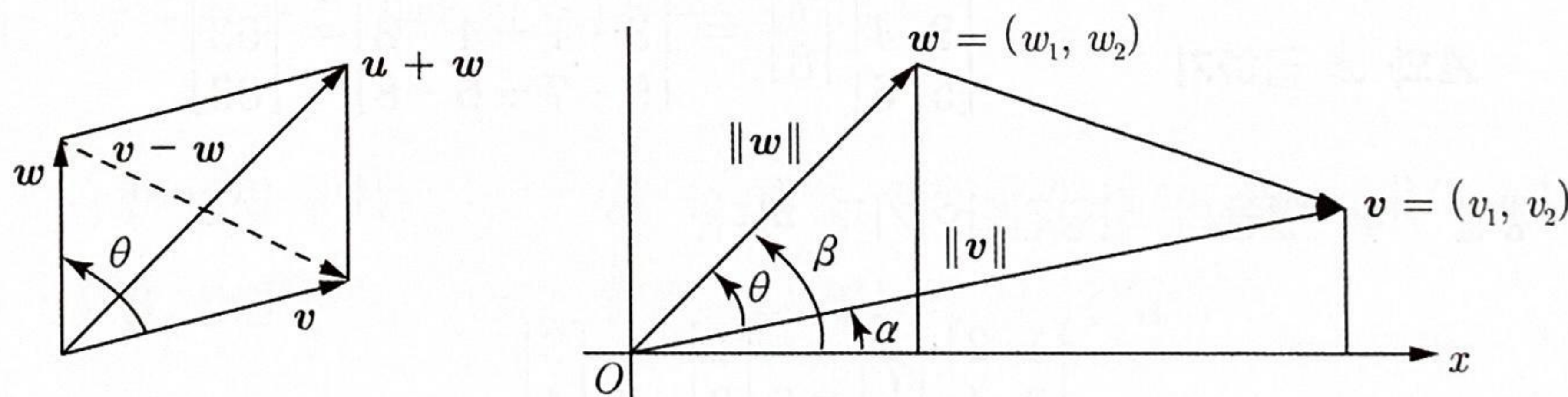
$(u_1, u_2) = (0.6, 0.8)$ 이고  $(U_1, U_2) = (0.8, 0.6)$ 일 때,  $u \cdot U$ 를 구하라.

23. 다음 물음에 답하라.

(a)  $|\cos \theta|$ 는 왜 1보다 크지 않은가?

(b) 정삼각형에서  $\cos \theta$ 를 구하라.

24. 평행사변형의 대각선 길이의 제곱의 합  $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2$ 이 평행사변형의 네 변의 길이의 제곱의 합  $2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ 이 됨을 증명하라.



25. (꼭 풀어볼 만한 문제)  $\|v\| = 5$ 이고  $\|w\| = 3$ 일 때,  $\|v - w\|$ 의 값으로 가능한 가장 작은 값과 가장 큰 값을 구하라. 또  $v \cdot w$ 의 값으로 가능한 가장 작은 값과 가장 큰 값도 구하라.

## 도전문제

26.  $xy$ -평면에 있는 세 벡터  $u, v, w$ 에 대해  $u \cdot v < 0, v \cdot w < 0, u \cdot w < 0$ 이 성립할 수 있는가? 그리고  $xyz$ -공간에 있는 몇 개의 벡터에 대한 내적이 모두 음수일 수 있는가? (평면에 있는 4개의 벡터에 대해서는 확실히 불가능하다).

27.  $\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$  형태의 수직인 단위벡터 4개를 찾으라(+ 또는 -를 선택하라).



28. MATLAB에서  $v = \text{randn}(3, 1)$ 을 이용해 랜덤단위벡터  $u = \frac{v}{\|v\|}$ 를 생성하라. 또한  $V = \text{randn}(3, 30)$ 을 이용해 30개의 랜덤단위벡터  $U_j$ 를 생성하라.  $|u \cdot U_j|$ 의 평균을 구하라. 미분적분학을 이용하면 평균은  $\int_0^\pi \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.
29.  $xy$ -평면에서 어떤 경우에 네 벡터  $v_1, v_2, v_3, v_4$ 가 사각형을 구성하는 네 변이 될 수 없는가? 임의의 4개의 길이가 있다고 해서 이를 이용해 사각형을 만들 수 있는 것은 아니다.

## 1.3 행렬과 열공간

1.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ 은  $3 \times 2$  행렬이다.  $m = 3$ 행과  $n = 2$ 열이 있으며, 랭크는 2이다.

2.  $Ax$ 의 3개의 성분은 각각 행렬  $A$ 의 3개의 행과 벡터  $x$ 의 내적이다.

$$\begin{array}{l} \text{행 단위로} \\ A \text{와 } x \text{ 곱하기} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 53 \\ 83 \end{bmatrix}$$

3.  $Ax$ 는 행렬  $A$ 의 열들의 선형결합이기도 하다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

4. 행렬  $A$ 의 열공간에는 모든 열의 선형결합  $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2$ 가 포함된다.

5. 랭크가 1인 행렬인 경우, 행렬  $A$ 의 모든 열(그리고 모든 선형결합  $Ax$ )은 하나의 직선 위에 있다.

1.1절과 1.2절에서는 선형결합, 내적, 벡터의 길이와 사잇각에 대해 설명했다. 1.3절은  $m$ 행  $n$ 열 행렬에 대한 연산으로 시작한다. 일반적인 행렬  $A$ 는  $m$ 행과  $n$ 열로 이루어진 직사각형이다.  $m$ 과  $n$ 이 동일하면  $A$ 는 **정사각행렬**(square matrix)이다. 다음 네 행렬은  $3 \times 3$  행렬의 예이다.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{항등행렬(identity matrix)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} : \text{대각행렬(diagonal matrix)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} : \text{삼각행렬(triangular matrix)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 7 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix} : \text{대칭행렬(symmetric matrix)}$$

종종 행렬  $A$ 의 열을 벡터  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 으로 생각한다. 각 벡터는  $m$ 차원 공간에 있다. 다음과 같은 행렬의 열벡터는 각각  $m = 3$ 개의 성분을 갖는다.

$$\begin{array}{l} m = 3\text{개의 행} \\ n = 4\text{개의 열} \\ 3 \times 4 \text{ 행렬 } A \end{array} \quad A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

위 행렬은 ‘차이행렬(difference matrix)’이다. 왜냐하면 행렬  $A$ 에 벡터  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 를 곱하면

$x_2 - x_1$ 과 같은 차를 성분으로 갖는 차이벡터  $Ax$ 가 생성되기 때문이다.  $m \times n$  행렬  $A$ 와  $n \times 1$  벡터  $x$ 를 곱하면 어떻게 되는가? 이에 대한 답을 얻을 수 있는 방법은 다음 2가지이다. 바로 행렬  $A$ 의 행을 다루는 방법과 열을 다루는 방법이다.

- 행을 이용한 방법에서는  $Ax$ 의 성분을 행렬  $A$ 의 행과 벡터  $x$ 의 내적으로부터 얻는다.
- 열을 이용한 방법에서는  $Ax$ 가 행렬  $A$ 의 열들의 선형결합이다.

행을 이용한 방법에 대해 알아보자. 우선 행렬  $A$ 의 각 행과 벡터  $x$ 를 곱한다. 이는 행렬  $A$ 의 행벡터와 벡터  $x$ 의 내적이다. 첫 번째 내적은 다음과 같이 행렬  $A$ 의 첫 번째 행으로부터 얻는다.

$$(1\text{행}) \cdot x = (-1, 1, 0, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 - x_1$$

$Ax$ 의 성분을 구하는 데 필요한  $m = 3$ 개의 내적을 계산하려면,  $m \times n (= 3 \times 3)$ 번의 곱셈이 필요하다.

$$\begin{array}{l} 3\text{개의 행} \\ 3\text{개의 내적} \end{array} \quad Ax = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\text{행}) \cdot x \\ (2\text{행}) \cdot x \\ (3\text{행}) \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

행렬  $A$ 의 각 행은 벡터  $x$ 와 같이  $n$ 개의 성분을 갖는다. 행렬  $A$ 의 4개의 열은 각각  $x_1, x_2, x_3, x_4$ 와 곱한다.



다음으로 열을 이용한 방법에 대해 알아보자. 행렬  $A$ 에 벡터  $x$ 를 곱한 것은 행렬  $A$ 의 열들의 선형결합이다.  $n$ 개의 열벡터  $a_1, \dots, a_n$ 은 각각 벡터  $x$ 의 성분인  $n$ 개의 수와 곱한다. 이렇게 곱한  $x_1 a_1, \dots, x_n a_n$ 을 더하면 다음과 같이 식 (1)과 동일한 벡터  $Ax$ 를 구할 수 있다.

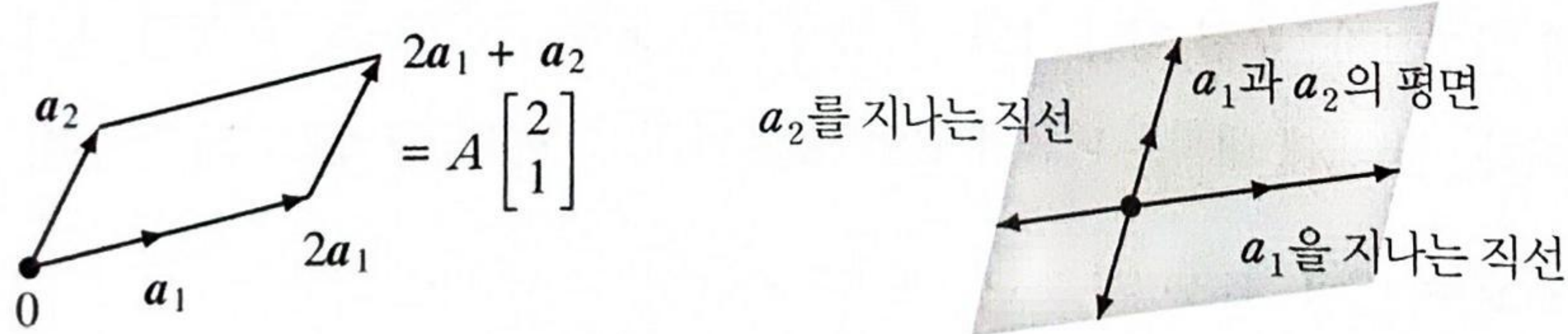
$$Ax = x_1 \cdot (\text{열 } a_1) + x_2 \cdot (\text{열 } a_2) + x_3 \cdot (\text{열 } a_3) + x_4 \cdot (\text{열 } a_4) \quad (2)$$

$n$ 개의 열벡터들의 선형결합은 행을 이용한 방법과 동일한 곱셈 연산을 포함한다. 하지만 더 높은 수준이라고 할 수 있다. 이 방법을 통해 3개의 내적 대신 벡터방정식 하나를 얻었다. 식 (1)과 아래의 식 (3)에서 동일한 결과  $Ax$ 를 확인할 수 있다.

$$\begin{array}{l} \text{열들의} \\ \text{선형결합} \end{array} \quad Ax = x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

행렬  $A$ 와 벡터  $x$ 에 수가 주어진 상황이면 행을 이용한 방법을 사용할 가능성이 크다. 그러나  $Ax$ 의 의미를 이해하고 싶다면 열을 이용한 방법을 사용하길 권한다. ‘열벡터  $Ax$ 는 행렬  $A$ 의 열들의 선형결합이다.’

이제 단 하나의 선형결합이 아닌 임의의 벡터  $x$ 에 대해 가능한 모든 선형결합  $Ax$ 에 대해 알아보려고 한다. 목표는 (행렬  $A$ 에 모든 벡터  $x$ 를 곱함으로써) 모든 열들의 선형결합을 구하는 것이다. [그림 1.7]은 하나의 선형결합  $2a_1 + a_2$ 와 함께 (모든  $x_1, x_2$ 에 대해) 모든 선형결합  $x_1 a_1 + x_2 a_2$ 의 평면을 나타낸 것이다.



[그림 1.7]  $a_1$ 과  $a_2$ 의 모든 선형결합은 평면을 채운다.

다음으로 살펴볼 중요한 수학 용어는 **선형독립**, **선형종속**, **열공간**이다.

여기서 중요한 사실은 행렬  $A$ 의 어떤 열은  $Ax$ 의 성분에 대한 새로운 정보를 제공할 수도 있고, 제공하지 않을 수도 있다는 점이다. 행렬  $A$ 의 어떤 열은 다른 열들의 선형결합이 될 수 있기 때문이다. [EX 1]은 3개의 새로운 방향을 제시하는 3개의 열을 보여준다. 이 열들은 ‘선형독립’이다.



**EX 1** (선형독립인 열) 다음 행렬  $A_1$ 에 대해 생각해보자.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{행렬의 각 열은 새로운 방향을 제시한다.} \\ \text{열들의 선형결합은 3차원 공간 } \mathbb{R}^3 \text{을 채운다.} \end{array}$$

모든 열의 선형결합을 보면 3차원 공간에 있는 모든 벡터  $(b_1, b_2, b_3)$ 를 만들 수 있음을 알 수 있다. 첫 번째 열  $x_1(1, 2, 3)$ 의 경우,  $b_1$ 이 어떤 숫자이든  $x_1 = b_1$ 으로 만들 수 있다.  $x_2(0, 4, 5)$ 의 경우,  $b_1$ 에는 영향을 미치지 않고  $b_2$ 가 어떤 숫자이든 만들 수 있다. 마지막으로  $x_3(0, 0, 6)$ 의 경우,  $b_1, b_2$ 에는 영향을 미치지 않고  $b_3$ 가 어떤 숫자이든 만들 수 있다. 이와 같은 방식으로  $A_1x = b$ 를 만족하는  $x_1, x_2, x_3$ 를 찾을 수 있다.

선형독립이란 ' $Ax = (0, 0, 0)$ 을 생성하는 유일한 선형결합은  $x = (0, 0, 0)$ '임을 의미한다. 각각의 새로운 열이 이전 열들의 선형결합으로 만들 수 없는 벡터일 때, 열들은 선형독립이라 한다.

**EX 2** (선형종속인 열) 다음 행렬  $A_2$ 에 대해 생각해보자.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (1 \text{ 열}) + (2 \text{ 열}) = (3 \text{ 열}) \\ \text{열들의 선형결합은 3차원 공간을 채우지 않는다.} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 + 2 = 3 \\ 1 + 4 = 5 \\ 6 + 0 = 6 \end{array}$$

선형독립의 반대는 '선형종속'이다. 주어진 행렬  $A_2$ 의 3개의 열은 선형종속이다. 3열은 1열과 2열이 있는 평면 위에 있다. 따라서 3열로 인해 새로운 선형결합이 만들어지지 않는다. 보통 열의 선형독립성은 왼쪽 열에서 오른쪽 열의 방향으로 판정한다. 1열  $(1, 1, 6)$ 은 하나의 열이므로 당연히 선형독립이다. 2열  $(2, 4, 0)$ 은 1열의 배수가 아니며 새로운 방향을 만든다. 하지만 3열  $(3, 5, 6)$ 은 1열과 2열의 합이다. 즉 3열은 1열, 2열과 선형독립이 아니다. 따라서 행렬  $A_2$ 에는 2개의 선형독립인 열이 있다.

만약 오른쪽 열에서 왼쪽 열의 방향으로 확인하면 선형독립인 3열과 2열로 시작할 것이다. 그러면 1열은 2열과 3열의 선형결합이다(1열은 3열에서 2열을 뺀 것이다). 왼쪽 열에서 시작하든, 오른쪽 열에서 시작하든 3개의 열이 동일한 평면 위에 있음을 알 수 있다. 2개의 선형독립인 열은 3차원 공간에서 평면을 생성한다. 그 평면이 행렬  $A_2$ 의 열공간이다. 모든 열의 선형결합은 평면을 만든다.

**[EX 2]의 선형종속인 열**  $(1 \text{ 열}) + (2 \text{ 열}) - (3 \text{ 열}) = (0, 0, 0)$



**EX 3** 다음 행렬  $A_3$ 에 대해 생각해보자.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & 15 & 20 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (2\text{열 } a_2) = (1\text{열 } a_1) \times 3 \\ (3\text{열 } a_3) = (1\text{열 } a_1) \times 4 \\ \text{모든 열의 쌍은 선형종속이다.} \end{array}$$

행렬  $A_3$ 의 3개의 열은 모두 3차원 공간의 동일한 직선 위에 있다. 이 직선은 벡터  $(c, 2c, 5c)((1, 2, 5)$ 의 모든 상수배)로 구성되어 있다.  $c = 0$ 일 때는 원점  $(0, 0, 0)$ 이 되며, 이로써 원점이 직선에 포함됨을 확인할 수 있다.

3차원 공간 위의 이 직선은 행렬  $A_3$ 의 열공간이다. 이 직선은 모든 벡터  $A_3x$ 를 포함한다.  $x$ 에 모든 벡터를 허용하면 행렬  $A_3$ 의 열공간을 채울 수 있다. [EX 3]에서는 한 직선만 채웠다. 이 경우는 거의 가능한 가장 작은 열공간이다.

열공간  $C(A)$ 는 모든 벡터  $Ax$ (모든 열의 선형결합)를 포함한다.

## 행렬 $A$ 의 열공간에 대한 생각

‘벡터공간’은 선형대수학에서 아주 중요한 주제이다. 열공간은 벡터공간의 예시이다. 모든 열의 선형결합은 열공간을 생성한다. 그러나 열공간을 만들 때는 모든 열이 아니더라도 선형독립인 열들만 있으면 충분하다. 이에 따라 1열에서 시작하여 왼쪽 열에서 오른쪽 열로 이동하면서 선형독립인 열을 식별한다. 다음과 같은 2가지 행렬  $A_4, A_5$ 를 예로 살펴보자.

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

행렬  $A_4$ 에는 4개의 선형독립인 열이 있다. 예를 들어 4열은 1열, 2열, 3열의 선형결합이 아니다. 즉 행렬  $A_4$ 에는 선형종속인 열이 없다. 주대각선에 0이 없는 삼각행렬의 경우, 열들이 선형독립인지 판별하기 쉽다. 행렬  $A_4$ 의 주대각성분은 1, 1, 1, 1이다.

행렬  $A_5$ 의 경우는 쉽지 않다. 이 행렬의 1열, 2열, 3열은 선형독립이다. 가장 궁금한 점은 4열이 1열, 2열, 3열의 선형결합인지의 여부이다. 4열의 마지막 성분 1과 일치하려면 해당 선형결합에는 1열이 필요하다. 선형결합에 1열을 포함시킨 상태에서, 행렬  $A_5$ 의 4열의 첫 번째 성분인



0을 만들기 위해서는 2열을 빼야 한다. 그런 다음 비슷한 이유로 3열을 더해야 한다. 그러면 4열의 두 번째 성분도 0이 된다. 따라서 행렬  $A_5$ 의 경우에는 식 (4)에 따라 3개의 열(1열, 2열, 3열)만 선형독립임을 알 수 있다.

$$A_5 \text{의 (4열)} = (1\text{열}) - (2\text{열}) + (3\text{열}) \quad (4)$$

다음 단계는 4개의 모든 열의 선형결합, 즉 열공간을 ‘시각화’하는 것이다. 참고로 경우에 따라 시각화는 불가능할 수도 있다. 예를 들어 4차원 공간은 그리는 것이 불가능하다. 행렬  $A_4$ 로 먼저 시작해보자.

$C(A_4)$ 는 왜 전체 공간  $\mathbb{R}^4$ 이 되는가?  $\mathbb{R}^4$ 의 모든 벡터는 다음과 같이 4개의 열의 선형결합임을 알 수 있다.

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = (v_1 - v_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (v_2 - v_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (v_3 - v_4) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (v_4) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$\mathbb{R}^4$ 의 임의의 벡터  $v$ 는 위와 같이 4개 열의 선형결합으로 만들 수 있다. 그러므로  $\mathbb{R}^4$ 의 모든 벡터는  $A_4$ 의 열공간에 있다. 따라서 4개의 방정식  $A_4 x = v$ 를 항상 풀 수 있다.

짧지만 유용한 단어인 ‘**생성(span)**’은 벡터 집합의 모든 선형결합을 의미한다.

따라서 행렬  $A$ 의 열의 생성이란 열공간이다.

(단, 행렬  $A$ 의 열은 선형독립일 수도 있고, 아닐 수도 있다.)

기하학적으로 행렬  $A_4$ 를 생각해보자. 1열  $(1, 0, 0, 0)$ 은 4차원 공간에서 직선에 해당한다. 이 직선에는 모든 벡터  $(c_1, 0, 0, 0)$ 이 포함된다. 2열은 또 다른 직선에 해당하며, 이 직선에는  $(c_2, c_2, 0, 0)$  형태의 모든 벡터가 포함된다. 모든 벡터  $(c_1, 0, 0, 0)$ 에 모든 벡터  $(c_2, c_2, 0, 0)$ 을 더하면 4차원 공간 안의 2차원 평면이 만들어진다. 이 평면은 1열과 2열의 생성이다.

행렬  $A_4$ 의 마지막 두 열은 두 방향을 더 제시한다. 따라서 행렬  $A_4$ 의 4개의 열은 선형독립이다. 마지막으로 방정식 (5)는 모든 4차원 벡터가 행렬  $A_4$ 의 4개의 열의 선형결합이 될 수 있음을 보여준다. 따라서 행렬  $A_4$ 의 열공간은  $\mathbb{R}^4$ 이다.

이제 행렬  $A_5$ 에 대해 위와 동일한 과정을 시도하면 1열, 2열, 3열은 선형독립이므로 문제가 없다. 그러나 4열은 1열, 2열, 3열의 선형결합이다. 따라서 1열, 2열, 3열의 선형결합은  $\mathbb{R}^4$ 의



내부에 3차원 부분공간을 만들고, 4열은 그 부분공간에 포함된다. 이 3차원 부분공간은 열공간  $C(A_5)$ 이다. 벡터  $v$ 가  $C(A_5)$ 에 포함될 때만  $A_5x = v$ 를 풀 수 있다. 행렬  $A_5$ 에는 선형독립인 열이 3개만 존재한다.

$C(A)$ 는 행렬  $A$ 의 열공간을 의미한다. 행렬  $A$ 의 행이  $m$ 개일 때, 열은  $m$ 차원 공간  $\mathbb{R}^m$ 의 벡터이다. 열공간은  $\mathbb{R}^m$ 을 모두 채울 수도 있고 채우지 못할 수도 있다. 다음은  $m = 3$ 인 경우, 즉 3차원 공간에서의 열공간으로 가능한 4가지 경우를 보여준다.

|                                            |                        |
|--------------------------------------------|------------------------|
| ① 전체 공간 $\mathbb{R}^3$                     | $A$ 의 3개의 열벡터가 선형독립이다. |
| ② 점 $(0, 0, 0)$ 을 지나는 $\mathbb{R}^3$ 상의 평면 | $A$ 의 2개의 열벡터가 선형독립이다. |
| ③ 점 $(0, 0, 0)$ 을 지나는 $\mathbb{R}^3$ 상의 직선 | $A$ 의 1개의 열벡터가 선형독립이다. |
| ④ $\mathbb{R}^3$ 상의 점 $(0, 0, 0)$          | $A$ 는 성분 0으로만 구성된다.    |

다음은 열공간  $C(A)$ 로 가능한 4가지 경우에 해당하는 간단한 행렬들이다.

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C(A) = \mathbb{R}^3 & C(A) = xy\text{-평면} & C(A) = x\text{축} & C(A) = (0, 0, 0) \end{array}$$

**[참고]** 이 책 5판의 1장에서는 '열공간'이라는 단어가 나오지 않았다. 공간에 관한 개념이 너무 중요해서 초반부터 다루어서는 안 된다고 생각했기 때문이다. 그러나 이제 중요한 아이디어를 이해하는 가장 좋은 방법은 일찍 그리고 자주 접하는 것이라 생각한다. 특히 수학에서 아이디어를 명확하게 만드는 것은 정의보다 예시이다.

다음과 같은 일련의 질문은 1.4절을 공부하면 그 답에 대한 열쇠를 찾을 수 있다. 이 질문의 답은 행렬을 이해하는 데 매우 중요하다.

- ① 행렬  $A$ 의 몇 개의 열이 선형독립인가? 그 개수에 해당하는  $r$ 을 행렬  $A$ 의 **랭크(rank)**라 한다.
- ② 처음  $r$ 개의 선형독립인 열은 무엇인가? 이를 열공간의 **기저(basis)**라 한다.
- ③  $r$ 개의 기본 열들의 어떤 선형결합이 나머지  $(n - r)$ 개의 열을 생성하는가?
- ④ 행렬  $A$ 를  $m \times r$  열행렬  $C$ 와  $r \times n$  행렬  $R$ 의 곱으로 나타내라. :  $A = CR$
- ⑤ (놀랍게도) 행렬  $R$ 의  $r$ 개의 행은 행렬  $A$ 의 **행공간(row space)**(행의 선형결합)의 기저이다.

1.4절에서는 행렬  $C$ 와  $R$ 을 곱하는 방법에 대해 설명한다. 그 결과는  $A = CR$ 이다. 행렬  $C$ 는 행렬  $A$ 의 열들로 이루어진다. 그러나 행렬  $R$ 은 행렬  $A$ 의 행으로부터 직접 얻지 않는다는 점에 유의해야 한다.



## 랭크 1 행렬

이제 모든 행렬의 구성 요소에 대해 알아보자. 모든 랭크  $r$  행렬은  $r$ 개의 랭크 1 행렬들의 합이다. 랭크 1 행렬의 경우, 모든 열벡터가 동일한 직선 위에 있다. 그중 점  $(0, 0, 0)$ 을 지나는 직선이 랭크 1 행렬의 열공간이다.

**EX 4** 행렬  $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 12 & -8 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ 의 랭크는 1이다. 따라서 모든 열은 동일한 방향의 벡터

이다. 2열과 3열은 1열  $a_1 = (1, 4, 2)$ 에 상수를 곱한 것이다. 즉  $a_2 = 3a_1$ ,  $a_3 = -2a_1$ 이다. 열공간  $C(A_6)$ 는 모든 벡터  $ca_1 = (c, 4c, 2c)$ 를 포함하는 직선이다.

다음은 모든 랭크 1 행렬에 대한 놀라운 사실이다. 행렬  $A_6$ 의 모든 행은 다른 행의 상수배이다. 열공간이  $m$ 차원 공간에서 직선일 때, 행공간은  $n$ 차원 공간에서 직선이다. 행렬  $A_6$ 의 모든 행은 벡터 \_\_\_\_의 상수배이다.

행렬  $A_6$ 와 같은 예는 기본적인 질문을 제기한다. 모든 열이 동일한 방향의 벡터일 때, 왜 모든 행의 방향이 동일할까? 먼저 다음과 같은  $2 \times 2$  행렬을 살펴보자. 2열은 1열에  $m$ 을 곱한 것이다.

$$A = \begin{bmatrix} a & ma \\ b & mb \end{bmatrix} \quad \text{2행은 1행의 상수배인가?}$$

그렇다. 2행  $[b \ mb]$ 는 1행  $[a \ ma]$ 에  $\frac{b}{a}$ 를 곱한 것이다. 즉 열 랭크가 1이면 행 랭크도 1이다. 모든 가능성을 다루기 위해  $a = 0$ 인 경우를 확인해야 한다. 이 경우 (1행)  $= [0 \ 0] = 0 \times$  (2행)이 된다.

$2 \times 2$  행렬에 대한 증명을 완료했다. 이제  $3 \times 3$  행렬을 살펴보자.  $a \neq 0$ 일 때 랭크는 1이 된다.

$$A = \begin{bmatrix} a & ma & pa \\ b & mb & pb \\ c & mc & pc \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{2열은 1열에 } m \text{을 곱한 것이다.} \\ \text{3열은 1열에 } p \text{를 곱한 것이다.} \\ \text{2행과 3행은 각각 1행에 } \frac{b}{a}, \frac{c}{a} \text{를 곱한 것이다.} \end{array}$$

이 행렬  $A$ 에는 2개의 선형독립인 열이 존재하지 않는다. 이 사실이 행에 대해서도 성립하는가? 2행이 1행과 동일한 방향인가? 그렇다. 3행이 1행과 동일한 방향인가? 그렇다. 즉 열에 대한



규칙은 여전히 성립한다. 따라서 행 랭크도 열 랭크와 같이 1이 된다.

이제 랭크 1 행렬에서 모든 행렬로 확장해보자. 이 시점에서 모든 행렬의 행 랭크는 열 랭크와 동일하다고 추측할 수 있다. 즉 행렬  $A$ 에  $r$ 개의 선형독립인 열이 있는 경우, 행렬  $A$ 에  $r$ 개의 선형독립인 행이 있다. 이 사실을 선형대수학의 첫 번째 위대한 정리라고 할 수 있다. 지금까지는 랭크 1 행렬의 경우에 대해서만 살펴보았다. 다음 절에서는 행렬곱  $AB$ 에 대해 설명하고, 모든 행렬에 대해 '(행 랭크) = (열 랭크)'임을 이해하는 것을 목표로 한다.

## 1.3 연습문제

※ 이 절에서는 열공간에 대해 다뤘다. 그러나 아직 열벡터의 선형독립과 선형종속을 결정할 수 있는 계산 시스템은 모르므로 여기서는 작은 크기의 행렬만 다룬다.

1. 다음 행렬들의 열공간(점, 직선, 평면, 3차원 전체 공간)에 대해 설명하라.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.  $(0, 0, 0)$ 을 만드는 선형결합을 찾으라(즉 (열공간)=(평면)). 단, 단순한 선형결합(모든 열에 0을 곱하는 것)은 허용되지 않는다.

어떤 열이 다른 열들과  
선형종속이 되는가?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

3. 행렬  $B$ 와  $C$ 의 열공간에 대해 설명하라.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = [B \quad -B] \text{ (3개의 행, 4개의 열)}$$

4. 내적을 이용해  $Ax$ ,  $By$ ,  $Iz$ 를 계산하라. 예를 들어  $Ax = (A \text{의 행}) \cdot x$ 이다.

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad By = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad Iz = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$



5. 행렬  $A, B, I$ 의 열들의 선형결합을 이용해 [문제 4]의  $Ax, By, Iz$ 를 각각 계산하라. 예를 들어  $Ax = 1 \cdot (1\text{열}) + 2 \cdot (2\text{열}) + 5 \cdot (3\text{열})$ 이다.

6. [문제 5]에서 행렬  $A$ 의 선형독립인 열은 몇 개인가? 행렬  $B$ 의 선형독립인 열은 몇 개인가? 또  $A+B$ 의 선형독립인 열은 몇 개인가?

7.  $A+B$ 가 다음과 같은 조건을 만족하는 각 경우에 대해 (2개의 선형독립인 열이 있는) 행렬  $A$ 와  $B$ 를 찾을 수 있는가?

(a) 선형독립인 열이 1개 존재한다.

(b) 선형독립인 열이 없다.

(c) 선형독립인 열이 4개 존재한다.

8. 행렬의 '열공간'은 모든 열의 선형결합을 포함한다. 다음 행렬  $A, B, C$ 의  $\mathbb{R}^3$ 에서의 열공간을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

9. 3개의 선형독립인 열을 가지며 모든 9개의 성분이 1 또는 2인  $3 \times 3$  행렬을 찾으라. 3개의 선형독립인 열을 가질 때, 성분 1을 최대 몇 개까지 가질 수 있는가?

10. 다음과 같은 행렬  $A$ 와  $B$ 가 랭크 1 행렬이 되도록 빈칸을 채워라. 또 행렬  $A$ 와  $B$ 의 열공간과 행공간을 각각 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \square \\ 5 & 15 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & \square & \square \end{bmatrix}$$

11. 행렬  $A$ 는 열  $a_1, a_2$ 를 갖는  $5 \times 2$  행렬이다. 행렬  $A$ 에 열을 하나 추가하여  $5 \times 3$  행렬  $B$ 를 만들자. 다음의 각 경우에 대해 행렬  $A$ 와  $B$ 가 동일한 열공간을 갖는지 판별하라.

(a) 새로 추가한 열이 영벡터인 경우

(b) 새로 추가한 열이  $(1, 1, 1, 1, 1)$ 인 경우

(c) 새로 추가한 열이  $a_2 - a_1$ 인 경우



12. 다음의 중요한 문장에 대해 설명하라. 이 문장은 열공간과 선형방정식의 개념을 연결한다.

방정식  $Ax = b$ 는 벡터  $b$ 가 행렬  $A$ 의 열공간에 있을 때 해  $x$ 를 갖는다.

방정식  $Ax = b$ 는 벡터  $b$ 를 생성하는 행렬  $A$ 의 열들의 선형결합을 찾는다. 다음과 같은 3가지 경우에 대해 각각  $x$ 를 구하라(우변의 벡터가  $b$ 이다).

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{또는} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{또는} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13. 다음 조건을 만족하는 두  $3 \times 3$  행렬  $A, B$ 를 구하라. 행렬  $A, B$ 는 동일한 열공간을 가져야 하고, 그 열공간은  $(1, 1, 1)$ 과 수직인 모든 벡터들의 평면이다.  $A+B$ 의 열공간은 무엇인가?

14. 다음 행렬  $A$ 가 2개의 선형독립인 열을 갖도록 하는  $q$ 를 각각 구하라.

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \\ 5 & 0 & q \end{bmatrix}$

(b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & q \end{bmatrix}$

(c)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}$

15.  $Ax = b$ 일 때, 행렬  $A$ 에 벡터  $b$ 를 하나의 새로운 열로 추가해도 랭크(선형독립인 열의 개수)가 동일하게 유지되는 이유를 설명하라.

16. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라.

- (a)  $5 \times 2$  행렬  $A, B$ 가 모두 선형독립인 열을 갖는다면,  $A+B$ 도 선형독립인 열을 갖는다.
- (b)  $m \times n$  행렬  $A$ 가  $n$ 개의 선형독립인 열을 갖는다면,  $m \geq n$ 이다.
- (c) 대부분의  $3 \times 3$  랜덤행렬은 3개의 선형독립인 열을 갖는다.

17. 행렬  $A, B$ 의 랭크가 모두 1인 경우,  $A+B$ 의 랭크로 가능한 값은 무엇인가? 가능한 각 값에 대한 예를 제시하라. 또  $A+B$ 의 랭크가 4가 될 수 없는 이유에 대해 설명하라.

18. 선형결합  $3s_1 + 4s_2 + 5s_3 = b$ 를 구하라. 그다음 벡터  $b$ 를 행렬-벡터 곱셈  $Sx$  형태로 나타내라. 여기서  $x$ 는 당연히 3, 4, 5로 이루어진 벡터이다. 또 행렬  $S$ 의 세 행과 벡터  $x$ 의 내적을 구하라.

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{가 행렬 } S \text{의 열이다.}$$



19.  $(a, b)$ 가  $(c, d)$ 의 상수배이고  $abcd \neq 0$ 인 경우,  $(a, c)$ 는  $(b, d)$ 의 상수배임을 증명하라. 이는 2개의 열이 하나의 직선 위에 있다는 중요한 사실과 연결된다. 먼저  $a, b, c, d$ 에 수를 대입하여 어떤 관련이 있는지를 확인할 수 있다. 이 사실은 다음 결과로 이어진다.

행렬  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 가 선형종속인 행을 갖는 경우 선형종속인 열도 갖는다.

20. 다음 방정식의 해를 각각 구하라.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

방정식의 해를 구하는 위 과정과 결과를 이용해 다음 문장의 빈칸을 채워라.

처음 홀수 3개(1, 3, 5)의 합은 \_\_\_\_이다. 처음 자연수 10개(1, ..., 10)의 합은 \_\_\_\_이다.

21. 다음 방정식의 해를 구하라.

$$Sy = c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

해  $y$ 를 행렬-벡터 곱셈, 즉  $Ac$  형태로 작성하라. 행렬  $A$ 는 행렬  $S$ 의 **역행렬**(inverse matrix)  $S^{-1}$ 이다. 행렬  $S$ 의 열은 선형독립인가, 선형종속인가?

22. 정사각행렬  $A$ 의 3개의 행은 선형종속이다. 그러면 3개의 열도 선형종속이어야 한다.  $Ax = 0$ 에 대해 영벡터가 아닌 해  $x$ 를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

(1행) + (2행) = (3행)

행렬  $A$ 는 오직 2개의 선형독립인 행을 갖는다.

그러면 행렬  $A$ 는 오직 2개의 선형독립인 열을 갖는다.

23. 다음의 각 행렬에 대해 열이 선형종속이 되도록 하는  $c$ 를 구하라. 그러면 열들의 선형결합이 영벡터가 된다.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & c \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} c & c & c \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} c & 1 \\ 4 & c \end{bmatrix}$$



24. 행렬  $A$ 의 열들의 선형결합에 따라  $Ax = 0$ 이면, 행렬  $A$ 의 모든 행과 벡터  $x$ 의 내적은 0이다. 즉 다음과 같다.

$$\text{만약 } [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{이면, } \begin{bmatrix} r_1 \cdot x \\ r_2 \cdot x \\ r_3 \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

이때 행렬  $A$ 의 3개의 행은 평면 위에 있다. 이 평면이 왜 벡터  $x$ 와 수직인지를 설명하라.

## 1.4 행렬곱 $AB$ 와 $CR$

1. 행렬  $A$ 와  $B$ 를 곱하려면,  $A$ 의 행 길이는  $B$ 의 열 길이와 같아야 한다.
2. 행렬  $AB$ 의  $i$ 행  $j$ 열의 수는 행렬  $A$ 의  $i$ 행과 행렬  $B$ 의  $j$ 열의 내적이다.
3.  $A \times (B \text{의 } j \text{열}) = (AB \text{의 } j \text{열})$ 이다.
4. 보통  $AB$ 와  $BA$ 는 다르다. 그러나 항상  $(AB)C = A(BC)$ 이다.
5. 행렬  $A$ 의  $r$ 개의 선형독립인 열을 행렬  $C$ 의 열로 잡으면 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$A = CR = (m \times r \text{ 행렬}) \times (r \times n \text{ 행렬})$$

행렬에 열벡터를 곱하는 방법은 이미 알고 있다. 이 절에서는  $AB$ 와 같은 행렬 간의 곱셈에 대해 다룬다. 행렬  $B$ 의 열이  $b_1, b_2, \dots, b_p$ 인 경우, 이전에 살펴본 행렬과 열벡터의 곱셈 방법을 기반으로 한다. 단순히 행렬  $A$ 에 행렬  $B$ 의 열  $p$ 개를 각각 곱함으로써, 행렬  $AB$ 의 열  $p$ 개를 구한다.

$$\begin{aligned} (AB \text{의 } j \text{열}) &= A \cdot (B \text{의 } j \text{열}) \\ \text{만약 } B &= [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p] \text{이면 } AB = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p] \text{이다.} \end{aligned} \tag{1}$$

이 결과를 명확히 확인하기 위해  $2 \times 2$  '교환행렬'  $B$ 로 시작하자. 행렬  $B$ 는 2개의 열  $b_1, b_2$ 를 갖는다. 각 열에 행렬  $A$ 를 곱하여  $AB$ 의 각 열을 생성하면 다음과 같다.

$$Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad Ab_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

곱셈 결과인 행렬  $AB$ 의 열이 행렬  $A$ 의 열을 교환한 것이라는 점에서 행렬  $B$ 를 교환행렬이라 한다.



행렬  $A$ 에 다른 행렬  $B$ 를 곱하면 다음과 같이 더 많은 결과를 확인할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{의 계산은 } Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \text{과 } Ab_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \text{을 포함한다.}$$

요점은 다음과 같다. 행렬과 벡터의 곱셈  $Ab_1$ 을 계산할 때 행 방법이나 열 방법을 이용할 수 있다. 행 방법은 행렬  $A$ 의 모든 행과 벡터  $b_1$ 의 내적을 구하는 것이다.

$$\begin{array}{ll} \text{행 방법} & \\ \text{내적} & Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\text{행}) \cdot b_1 \\ (2\text{행}) \cdot b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix} \end{array} \quad (2)$$

열 방법은 행렬  $A$ 의 열들의 선형결합을 이용해  $Ab_1$ 을 구하는 것이다. 결과는 행 방법과 동일하다.

$$\begin{array}{ll} \text{열 방법} & \\ \text{내적} & Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix} \end{array} \quad (3)$$

두 방법 모두 4번의 동일한 곱셈을 이용한다. 대부분은 행 방법을 선택하는 편이다. 행렬곱  $AB$ 를 구하기 위해서는, 행렬  $A$ 의 각 행과 행렬  $B$ 의 각 열의 내적을 계산하면 된다. 행렬  $A$ 의 행이 2개이고 행렬  $B$ 의 열이 2개일 때 4번의 내적이 필요하다.

$A$ 가  $m \times n$  행렬이고  $B$ 가  $n \times p$  행렬일 때,  $AB$ 는  $m \times p$  행렬이 된다. 따라서  $mp$ 번의 내적이 필요하다.

$$\begin{array}{ll} \text{행 방법} & \\ \text{행렬 } A \text{의 행} & AB = \begin{bmatrix} (1\text{행}) \cdot (1\text{열}) & (1\text{행}) \cdot (2\text{열}) \\ (2\text{행}) \cdot (1\text{열}) & (2\text{행}) \cdot (2\text{열}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \end{array} \quad (4)$$

이제 행렬  $A$ 의 열들의 선형결합을 이용한 열 방법으로  $AB$ 를 계산하자. 이는 벡터 연산이며  $AB$ 의 전체 열을 생성한다. 식 (3)에서  $AB$ 의 1열을 구했다. 이번에는  $Ab_2$ 를 계산하여  $AB$ 의 2열을 구해보자.

$$\begin{array}{ll} \text{열 방법} & \\ Ab_2 & Ab_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix} \end{array} \quad (5)$$

식 (3)과 (5)는 식 (4)의  $AB$ 의 2개의 열과 동일한 결과를 보여준다. 두 방법 모두 동일한 8번의 곱셈을 사용하지만 순서는 다르다.  $A$ 가  $m \times n$  행렬이고  $B$ 가  $n \times p$  행렬일 때,  $AB$ 는  $m \times p$  행렬이 된다.

- **행 방법** :  $AB$ 에서  $mp$ 번의 내적이 필요하고, 각 내적은  $n$ 번의 곱셈이 필요하다. 따라서 총  $mnp$ 번의 곱셈이 필요하다.
- **열 방법** :  $AB$ 에  $p$ 개의 열이 있고, 각 열은  $mn$ 번의 곱셈으로 구할 수 있다. 따라서 총  $mnp$ 번의 곱셈이 필요하다.



실제 계산 속도는 행렬이 어떻게 저장되는지에 따라 달라진다. 보통은 열 순서대로 보관하는 것이 일반적이다. 개별 숫자보다는 행렬 단위로 저장소에서 옮기는 것이 더 빠르다. 큰 곱셈의 경우에는 blas 3(레벨 3 기본 선형대수학 하위프로그램)을 이용해 행렬-행렬 연산을 하는 것이 가장 좋다. 레벨 1(벡터-벡터), 레벨 2(행렬-벡터)와의 비교는 웹사이트 [netlib.org/blas/](http://netlib.org/blas/)에서 확인할 수 있다.

지금까지 행렬곱  $AB$ 를 계산하는 방법으로 (행)  $\cdot$  (열) 내적과 (행렬)  $\times$  (열)  $Ab_j$ 를 살펴봤다. 또 다른 2가지 방법은 (행)  $\times$  (행렬)과 (열)  $\times$  (행)으로 이 방법들은 곧 다를 것이다. 4가지 방법 모두 다양한 순서로 동일한  $mnp$ 번의 곱셈을 이용해  $AB$ 를 구한다.

$A, B$ 가 모두  $2 \times 2$  행렬일 때,  $AB$ 를 계산하기 위해서는  $2^3 = 8$ 번의 곱셈이 필요하다.<sup>2</sup>

## 일반적으로 $AB$ 는 $BA$ 와 다르다

행렬  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 에 대해  $AB$ 는 행렬  $A$ 의 열을 교환한 행렬이다. 그러나  $BA$ 는 행렬  $A$ 의 행을 교환한 행렬이다.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

행렬곱은 교환법칙이 성립하지 않는다. 즉 일반적으로  $BA \neq AB$ 이다. 행렬  $B$ 에 대한 행 연산을 하기 위해서는 행렬  $A$ 를 왼쪽에서 곱해야 하고, 행렬  $A$ 에 대한 열 연산을 위해서는 행렬  $B$ 를 오른쪽에 곱해야 한다.

**Q.** 왜 교환행렬  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 제곱이 항등행렬이 되는가?  $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I$

## $(AB)C = A(BC)$

행렬곱의 경우 결합법칙은 성립한다.  $ABC$ 를 계산할 때  $AB$ 를 먼저 곱할 수도 있고,  $BC$ 를 먼저 곱할 수도 있다. 곱할 때 행렬의 순서는  $A, B, C$ 로 유지하며, 각 행렬의 크기는 다음과 같이 곱셈 계산에 적합해야 한다.

$A$ 는  $m \times n$  행렬,  $B$ 는  $n \times p$  행렬,  $C$ 는  $p \times q$  행렬이어야 하고,  
이 경우  $AB$ 는  $m \times p$  행렬이고  $(AB)C$ 는  $m \times q$  행렬이 된다.

<sup>2</sup> 슈트라스센(Strassen)은  $2 \times 2$  행렬을 곱할 때, 추가적인 덧셈을 하면 7번의 곱셈만으로도 충분하다는 사실을 발견했다. 일반적으로  $n \times n$  행렬에 대한 곱셈 횟수를  $n^c$ 로 표기할 때, 여기서  $c = \log_2 8 = 3$ 에서  $c = \log_2 7$ 로 줄일 수 있다. 지속적인 연구를 통해  $c$ 를 더 줄일 수도 있지만, 2보다 작게 할 수는 없다. 왜냐하면  $n \times n$  행렬  $A, B$ 의  $n^2$ 개의 성분이 모두 사용되어야 하기 때문이다. 가장 작은 지수  $c$ 를 찾는 것은 아주 어려운 미해결 문제이다.



다음과 같이 교환행렬  $B$ 를 이용해 결합법칙이 성립하는지 확인할 수 있다.

$$(BA)B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(AB) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

따라서 행렬  $A$ 에 대한 행 연산은 행렬  $A$ 에 대한 열 연산의 앞에 올 수도 있고 뒤에 올 수도 있다.

행렬  $C$ 가 열벡터  $x$ 일 때,  $(AB)C = A(BC)$ 의 의미에 주목해야 한다. 벡터  $x$ 의  $j$ 번째 성분이 1이고 나머지 성분이 모두 0일 때, 결합법칙에 의해  $(AB)x = A(Bx)$ 가 된다는 사실을 해석해보자. 이 식의 좌변은  $AB$ 의  $j$ 열이고, 우변은  $A \times (B$ 의  $j$ 열)이다. 양변이 같다는 것은 식 (1)에서 이미 살펴본 행렬곱에 관한 규칙이다.

행렬에서는 결합법칙뿐만 아니라 분배법칙도 성립한다.

$$\text{결합법칙 : } (AB)C = A(BC), \quad \text{분배법칙 : } A(B + C) = AB + AC \quad (7)$$

## $AB$ 에 대한 리뷰

- 내적을 이용한 방법 :  $(A$ 의  $i$ 행)  $\cdot$  ( $B$ 의  $j$ 열)  $= (AB)_{ij} = (AB$ 의  $i$ 행  $j$ 열 성분)
- 열들의 선형결합을 이용한 방법 :  $A \times (B$ 의 열  $b_j) = (AB$ 의  $j$ 열)

(일반적인 방법인) 수로 계산하는 내적을 이용한 방법을 통해  $mp$ 번의 내적으로  $m \times p$  행렬  $AB$ 를 구할 수 있다. 또한 벡터로 계산하는 열들의 선형결합을 이용한 방법을 통해  $p$ 개의 선형결합  $Ab_j$ 로  $AB$ 의  $p$ 개의 열을 만들 수 있다.

직접 손으로 계산할 때는 내적을 이용한 방법으로  $AB$ 를 계산하는 것이 편할 수 있다. 또한 열들의 선형결합을 이용한 방법을 통해 행렬곱을 시각화할 수 있다.  $AB$ 의 열  $Ab_j$ 는 모두 행렬  $A$ 의 열들의 선형결합으로 만들어진다.

## 랭크 1 행렬과 $A = CR$

랭크 1 행렬의 모든 열은 동일한 직선 위에 있다. 이 직선이 행렬  $A$ 의 열공간이다. 1.3절의 [EX 4]에서 랭크 1 행렬의 모든 행도 하나의 직선 위에 있음을 확인했다. 즉 모든 열벡터의 방향이 동일할 때, 모든 행벡터의 방향도 동일하다. [EX 1]은 랭크가  $r = 1$ 인 경우의 예이다.



**EX 1** 다음 행렬  $A$ 를 살펴보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 100 \\ 3 & 6 & 30 & 300 \\ 2 & 4 & 20 & 200 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{랭크 1 행렬} \\ \text{선형독립인 열 1개} \\ \text{선형독립인 행 1개} \end{array}$$

모든 열은  $(1, 3, 2)$ 의 상수배이다. 또한 모든 행은  $[1 \ 2 \ 10 \ 100]$ 의 상수배이다. 선형독립인 열이 1개만 있을 때는 선형독립인 행도 1개뿐이다. 이 결과가 참인 이유는 무엇인가? 이 결과를 만족하는 또 다른 예는 (모든 성분이 1인 행렬) = (모든 성분이 1인 열)  $\times$  (모든 성분이 1인 행)이다.

이제 앞의 질문을 행렬곱을 통해 설명하려고 한다. 행렬  $A$ 는  $CR$  형태로 나타낼 수 있다. 행렬  $A$ 가 랭크 1 행렬인 경우,  $C$ 의 열은 1개이고  $R$ 의 행은 1개이다.  $CR$ 은  $(3 \times 1 \text{ 행렬}) \times (1 \times 4 \text{ 행렬})$ 이다.

$$\text{랭크} = 1 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 100 \\ 3 & 6 & 30 & 300 \\ 2 & 4 & 20 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 10 \ 100] = CR \quad (8)$$

내적 ( $C$ 의 행)  $\cdot$  ( $R$ 의 열)은  $1 \times 1$ 과 같은 간단한 수의 곱이다. 마지막 내적은  $2 \times 100$ 이다. 이는 내적을 이용해 행렬곱  $CR$ 을 계산한 것이다. 12번의 곱셈으로 행렬  $A$ 의 12개의 성분이 구해진다.

행렬  $A$ 의 행은 각각  $R = [1 \ 2 \ 10 \ 100]$ 에 수 1, 3, 2를 곱한 벡터이다. 랭크 1 행렬  $A$ 를 하나의 열  $C$ 와 하나의 행  $R$ 로 분해함으로써 다음을 얻을 수 있다.

행렬  $A$ 의 열공간이 하나의 직선이면, 행렬  $A$ 의 행공간도 하나의 직선이다.

랭크 1 행렬  $A$ 를 하나의 열  $C$ 와 하나의 행  $R$ 로 분해한 것처럼, 랭크  $r$  행렬  $A$ 를  $r$ 개의 열을 가진 행렬  $C$ 와  $r$ 개의 행을 가진 행렬  $R$ 로 분해할 수 있다는 것이 다음으로 살펴볼 주제이다. 여기서  $r$ 은 행렬  $A$ 의 ‘랭크’이다.



## C는 A의 선형독립인 열 r개를 포함한다

다음과 같이 왼쪽 열에서 오른쪽 열로 이동하며 행렬 A의 선형독립인 열을 찾는다고 가정해보자.

- 행렬 A의 1열의 성분이 모두 0이 아닌 경우, 1열을 행렬 C에 포함한다.
- 행렬 A의 2열이 1열의 상수배가 아닌 경우, 2열을 행렬 C에 포함한다.
- 행렬 A의 3열이 1열과 2열의 선형결합이 아닌 경우, 3열을 행렬 C에 포함한다. 그리고 이 과정을 계속한다.

행렬 C는 행렬 A로부터 가져온 r개의 열을 오른쪽에 하나씩 추가하는 과정을 마치면 만들어진 다. 여기서 r은 행렬 A와 C의 랭크이다. 행렬 A의 열들은 선형종속일 수도 있다. 그러나 행렬 C의 열들은 반드시 선형독립이다.

- 행렬 C의 어떤 열도 다른 열들의 선형결합이 될 수 없다.
- 행렬 C의 열들의 선형결합으로 영벡터를 만들 수 없다.  
즉  $x = 0$ 일 때만  $Cx = 0$ 이다.

선형독립인 열

행렬 C의 r개의 선형독립인 열들의 선형결합으로 행렬 A의 모든 n개의 열을 만들 수 있다.

$Cx = 0$ 이면  $x_1(C\text{의 } 1\text{열}) + x_2(C\text{의 } 2\text{열}) + \dots + x_r(C\text{의 } r\text{열}) = 0$ 이다. 행렬 C의 r개의 열이 선형독립이므로  $x = 0$ 일 때만  $Cx = 0$ 이 된다. 이를 증명하는 방법은 결론을 부정하는 것이다.  $Cx = 0$ 이면서  $x_i$ 가 0이 아닌 마지막 계수라 가정해보자.  $x_i$ 로  $x_1(C\text{의 } 1\text{열}) + x_2(C\text{의 } 2\text{열}) + \dots + x_r(C\text{의 } r\text{열}) = 0$ 의 양변을 나누면, 행렬 C의 i열은 다른 열들의 선형결합으로 나타낼 수 있다. 이는 행렬 C의 r개의 열이 선형독립이라는 조건에 모순이다, 따라서  $x = 0$ 일 때만  $Cx = 0$ 이 된다.

---

**EX 2**  $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ 로부터  $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ 이고, 랭크는  $r = 2$ 이다. 행렬 A의 1열과 3

열은 행렬 C에 포함된다. 행렬 A의 2열은 1열에 3을 곱한 것이므로, 1열과 2열은 선형종속이다. 따라서 행렬 A의 2열은 행렬 C에 포함되지 않는다.

---



## 행렬 분해 $A = CR$

$A = CR$ 에서 행렬  $R$ 은 행렬  $A$ 의 모든 열을 행렬  $C$ 의 열들의 선형결합으로 어떻게 생성할 수 있는지 알려준다. 행렬  $A$ 의 1열은 행렬  $C$ 에 있으므로, 행렬  $R$ 의 1열의 성분은 1 또는 0이다. 식 (9)에서 행렬  $A$ 의 3열은 행렬  $C$ 의 2열이므로, 행렬  $R$ 의 3열의 성분은 1 또는 0이다.

$$\begin{array}{l} R \text{ 안의 항등행렬 } I \\ \text{랭크 } r = 2 \end{array} \quad A = CR \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & ? & 0 \\ 0 & ? & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

행렬  $A$ 의 두 열이 행렬  $C$ 에 포함되므로, 행렬  $R$ 의 일부분이 항등행렬  $I$ 로 보인다. 행렬  $R$ 의 2열에 물음표가 있는 이유는 행렬  $A$ 의 2열이 행렬  $C$ 에 없기 때문이며, 이는 행렬  $A$ 의 2열과 1열이 선형종속이기 때문이다. 행렬  $A$ 의 2열은 1열의 3배이므로, 행렬  $R$ 에 성분 3이 있어야 한다.

$$\begin{array}{l} A : m \times n \text{ 행렬} \\ C : m \times r \text{ 행렬} \\ R : r \times n \text{ 행렬} \end{array} \quad A = CR \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 4 & 12 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$A = CR$ 에 대해 정리하면 다음과 같다.

- ① 행렬  $C$ 는 행렬  $A$ 에서 (왼쪽 열에서 오른쪽 열로) 선택한  $r$ 개의 선형독립인 열들의 집합이다.
- ②  $R = [I \ F]$ 의 경우 행렬  $C$ 를 만드는  $r$ 개의 열의 위치에 항등행렬  $I$ 가 포함된다.
- ③ 행렬  $A$ 의 선형종속인 열들은 행렬  $C$ 의 선형독립인 열들의 선형결합으로 만들 수 있고, 이 선형결합은  $CF$ 로 표기한다.

$R = [I \ F]$ 에서  $I$ 를 나타내는  $r$ 개의 열의 제외한  $(n-r)$ 개의 열은 행렬  $F$ 를 이룬다. 그러면  $A = CR$ 은 다음과 같이 정리된다.

$$A = C[I \ F] = [C \ CF] = [(A \text{의 선형독립인 열}) \ (A \text{의 선형종속인 열})]$$

행렬  $C$ 는 행렬  $A$ 와 동일한 열공간을 갖고, 행렬  $R$ 은 행렬  $A$ 와 동일한 행공간을 갖는다.

**EX 3** 다음과 같은 랭크 2 행렬  $A = CR$ 을 살펴보자.

$$\begin{array}{l} A = CR \\ \text{랭크 } 2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (11)$$



행렬  $A$ 의 왼쪽 열 2개가 그대로 행렬  $C$ 에 포함된다. 따라서 항등행렬  $I$ 가 행렬  $R$ 의 해당 위치에 포함된다. 여기서  $F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 이다.

$$(A \text{의 } j \text{열}) = C \times (R \text{의 } j \text{열}), \quad (A \text{의 } i \text{행}) = (C \text{의 } i \text{행}) \times R$$

행렬  $A$ 의 모든 열이 선형독립이면  $C = A$ 가 된다. 이때  $R = I$ 이다.

1장에서는 행렬  $R$ 보다 행렬  $C$ (행렬  $A$ 의 선형독립인 열로 구성)를 먼저 찾는다. 그러나 3장에서는 행렬  $R$ 을 먼저 찾을 것이다. 다음 예에서 행렬  $A$ 의 3열은 행렬  $C$ 의 2열이다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = CR \quad \text{행렬 } A, C, R \text{의 랭크는 모두 2}$$

행렬  $R$ 은 행렬  $C$ 의 선형독립인 열에서 어떻게 행렬  $A$ 의 모든 열을 얻는지 알려준다.

다음은 행렬  $A$ 의 행 랭크가 열 랭크와 같다는 것에 대한 비형식적 증명 과정이다.

- ❶ 행렬  $C$ 의  $r$ 개의 열은 선형독립이다(행렬  $A$ 에서 선형독립인 열만 선택했다).
- ❷ 행렬  $A$ 의 모든 열은 행렬  $C$ 의  $r$ 개의 열의 선형결합이다( $A = CR$ ).
- ❸ 행렬  $R$ 의  $r$ 개의 행은 선형독립이다( $R$ 에는  $r \times r$  항등행렬  $I$ 가 포함된다).
- ❹ 행렬  $A$ 의 모든 행은 행렬  $R$ 의  $r$ 개의 행의 선형결합이다( $A = CR$ ).

## 행렬 $R$ 을 찾는 방법

지금까지는  $A = CR$ 에서 행렬  $R$ 을 찾는 방법을 배우지 않았다. 아래의 [EX 4]에서 행렬  $R$ 을 찾는 문제는 행렬  $A$ 의 3열이 1열과 2열의 선형결합이라 가정하고, 선형결합의 계수  $x, y$ 를 찾는 것으로 연결된다. 여기서  $x, y$ 는 행렬  $R$ 의 3열이 될 것이다.

**EX 4** 다음과 같은 행렬방정식에 대해 계수  $x, y$ 를 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

이렇게 작은 행렬의 경우에도 계수  $x, y$ 를 바로 찾을 수는 없다. 따라서 행렬  $A$ 의 랭크가 2인지 3인지 알 수 없다. 계수  $x, y$ 를 찾을 수 있는 좋은 방법은 소거법이다. 소거법은 정사



각행렬의 경우 2장에서, 모든 행렬의 경우 3장에서 핵심 알고리즘이 될 것이다. 이제 소거법에 대해 알아보자.

아이디어는 ‘행 연산’을 통해 행렬  $A$ 를 단순화하는 것이다. 이렇게 하면  $x, y$ 에 대한 방정식이 간단해진다. 먼저 행렬  $A$ 의 1열에서 성분 2, 3을 소거해야 한다. 이를 위해 행렬  $A$ 의 2행에서 1행에 2를 곱한 것을 빼고, 3행에서 1행에 3을 곱한 것을 뺀다. 이제 행렬  $A$ 는 다음과 같은 행렬  $B$ 로 바뀐다.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

방정식에서 방정식을 빼면 새로운 방정식이 남는다. 새로운 방정식은  $-2y = -6$ 이다. 따라서  $y = 3$ 이다. 그러면 가장 위의 방정식  $x + 3y = 4$ 로부터  $x = -5$ 이다. 따라서 방정식 (12)의 해는  $x = -5, y = 3$ 이다.

$$\begin{array}{l} x = -5 \\ y = +3 \end{array} \quad -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad A \text{의 3열은 선형종속이다.}$$

그러므로  $-5, 3$ 이  $A = CR$ 로 분해했을 때 행렬  $R$ 의 3열에 나타난다. 여기서 행렬  $A, C, R$ 의 랭크는 모두 2이다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = CR \quad (14)$$

행렬  $A$ 에서 행렬  $B$ 로 소거하는 과정을 **행 축소**(row reduction)라 한다. 행렬  $B$ 는 더 간단한 행렬  $U$ 로 만들 수 있다. 다음과 같이 행렬  $B$ 의 3행에서 2행을 빼는 것이다. 그러면 행렬의 3행이 영벡터인 행렬  $U$ 를 얻는다.

$$A \rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\text{상삼각행렬 } U) \quad (15)$$

행렬  $U$ 의 3행이 영벡터이므로 행 랭크는 2가 된다. 2장에서는 행렬  $U$ 를 만드는 과정까지만 진행하고, 3장에서는 위쪽 행으로 소거 과정을 더 진행해 0을 더 많이 만들어 1행도 간단히 만드는 방법까지 알아본다. 결국 다음과 같은 행렬  $R_0$ 를 얻는다.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_0$$



- 행렬  $R_0$ 의 모든 행은 행렬  $A$ 의 행들의 선형결합이다.
- 행렬  $R_0$ 의 3행인 영벡터로부터 행렬  $A$ 의 랭크가  $r=2$ 임을 알 수 있다.
- 행렬  $R_0$ 에 있는  $2 \times 2$  항등행렬은 행렬  $A$ 의 1열과 2열이 선형독립임을 보여준다 (이 두 열이 행렬  $C$ 에 포함된다).
- 행렬  $R_0$ 에서 영행인 3행을 제거하면  $A = CR$ 의 행렬  $R$ 이 남는다.
- 3장에서 다룰 소거법은 행렬  $R$ 을 구하는 체계적인 방법이다.

$A = CR$ 에 관한 핵심 내용을 정리하면 다음과 같다.

**$A = CR$ 에 관한  
주요 사실**

- 행렬  $C$ 의  $r$ 개의 열은 행렬  $A$ 의 열공간에 대한 기저를 이룬다.  
: 행렬  $A$ 의 열공간은  $r$ 차원 공간이다.
- 행렬  $R$ 의  $r$ 개의 행은 행렬  $A$ 의 행공간에 대한 기저를 이룬다.  
: 행렬  $A$ 의 행공간은  $r$ 차원 공간이다.

‘기저’와 ‘차원’은 나중에 3.4절에서 정의할 것이다.

- 1장에서는 행렬  $A$ 의 선형독립인 열들이 행렬  $C$ 에 배치됨을 살펴보았다.
- 3장에서는 행렬  $A$ 의 선형독립인 행들의 선형결합을 행렬  $R$ 에 배치하는 것을 살펴본다.

행렬  $A$ 를  $A = CR$ 로 분해하는 것은 매우 중요하다. 행렬  $C$ 는 행렬  $A$ 의  $r$ 개의 선형독립인 열로 이루어진다. 행렬  $R$ 은 행렬  $C$ 의 열들을 어떻게 선형결합하면 행렬  $A$ 를 만들 수 있는지를 알려준다(행렬  $A$ 의  $r$ 개의 열이 행렬  $C$ 에 있으므로, 행렬  $R$ 은 항등행렬 모양을 포함한다). 3장에서는 행렬  $A$ 에 소거법을 적용하여 행렬  $R$ 을 계산하는 방법을 배운다.  $A = CR$ 은 선형방정식  $Ax = b$ 를 푸는 문제의 열쇠가 될 것이다.

## **( $A$ 의 열) $\times$ ( $B$ 의 행), ( $C$ 의 열) $\times$ ( $R$ 의 행)**

행렬을 곱하는 또 다른 방법이 있다. 이 방법은  $AB$ 를 계산할 때, 식 (16)과 같이 행렬  $A$ 의 열과 행렬  $B$ 의 행을 곱하는 것이다.



$$AB = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\text{열 } a_k} \underbrace{\begin{bmatrix} -b_1^* - \\ \vdots \\ -b_n^* - \end{bmatrix}}_{\text{행 } b_k^*} = a_1 b_1^* + a_2 b_2^* + \cdots + a_n b_n^* \quad (16)$$

(열  $a_k$ )  $\cdot$  (행  $b_k^*$ )들의 합

$a_k b_k^*$ 를 벡터의 **외적**(outer product)이라 한다.<sup>3</sup> 행렬  $a_k b_k^*$ 는 '(열)  $\times$  (행)'이므로 랭크가 1이다. 외적은 '(행)  $\times$  (열)'인 내적과 완전히 다르다. 만약  $A$ 가  $m \times n$  행렬이고  $B$ 가  $n \times p$  행렬이면 '(A의 열)  $\times$  (B의 행)'의 합은 내적 '(A의 행)  $\cdot$  (B의 열)'로 구한  $AB$ 와 결과가 같다.

$AB$ 는 동일한  $mnp$ 번의 작은 곱셈을 포함하지만, 다음과 같이 방법에 따라 서로 다른 순서로 진행된다.

- (행)  $\cdot$  (열) :  $mp$ 번의 내적이 필요하고, 각 내적은  $n$ 번의 곱셈이 필요(총  $mnp$ 번의 곱셈)
- (열)  $\times$  (행) : 랭크 1 행렬을  $n$ 번 더하고, 랭크 1 행렬 하나를 만드는 데  $mp$ 번의 곱셈이 필요(총  $mnp$ 번의 곱셈)

(열)  $\times$  (행) 방법

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(\text{랭크 1 행렬}) + (\text{랭크 1 행렬}) = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 14 & 16 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 & 44 & 48 \\ 50 & 55 & 60 \\ 60 & 66 & 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 52 & 57 \\ 64 & 71 & 78 \\ 81 & 90 & 99 \end{bmatrix} = AB$$

위의 예에서  $mnp = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ 이다. 두 번째 줄에서 두  $3 \times 3$  행렬의 모든 성분을 구하기 위해 18번의 곱셈을 했다. 그다음 9번의 덧셈을 하여 정확한 답  $AB$ 를 얻었다.

이 절에서 배운 내용을 상기하면 위 예에서  $AB$ 의 랭크는 2이다. 즉  $AB$ 는 2개의 선형독립인 열과 2개의 선형독립인 행을 갖는다. 이후의 장에서는 랭크 2가 의미하는 다른 결과를 살펴볼 것이다. 2장에서는  $3 \times 3$  행렬  $AB$ 의 랭크가 2이면 이 행렬의 역행렬이 존재하지 않는다는 사실에 대해 알아본다. 또한 5장에서는  $3 \times 3$  행렬  $AB$ 의 랭크가 2이면 **행렬식**(determinant)이 0이라는 사실에 대해 알아본다.

## 행렬 $R$ 에 대한 참고사항

놀랍게도  $A = CR$ 에서의  $R$ 은 이미 선형대수학에서 굉장히 유명한 행렬이다.  $R$ 은 행렬  $A$ 의

<sup>3</sup> (옮긴이) 이 책에서의 외적(outer product)은 물리학에서 플레밍의 왼손법칙(Fleming's left-hand rule)에 나오는 벡터곱(cross product)이 아니라, 벡터간의 텐서곱(tensor product)이다.



**기약행 사다리꼴**(reduced row echelon form)이라고 한다. 이는 MATLAB에서 명령어 `rref(A)`로 구현할 수 있으며, 기약행 사다리꼴 행렬  $R$ 의  $(m-r)$ 개의 행은 영벡터가 된다.

행렬 분해  $A = CR$ 은 선형대수학에서 아주 중요하다. 이 절의 연습문제에서는 다양한 형태의 행렬  $R$ 을 확인할 수 있다. 행렬  $R$ 의  $r$ 개의 열에는 항등행렬 모양이 포함된다. 행렬  $C$ 와 행렬  $R$ 의 각 열을 곱하면 행렬  $A$ 를 만들 수 있다.  $R_0$ 에 대해서는 3장에서 자세히 살펴본다.

**EX 5** 다음과 같은 행렬  $A = CR$ 에 대한 식을 보자.

$$A = [a_1 \ a_2 \ 3a_1 + 4a_2] = [a_1 \ a_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = CR$$

$a_1, a_2$ 는 행렬  $A$ 의 선형독립인 열이다. 행렬  $A$ 의 3열은  $a_1$ 과  $a_2$ 의 선형결합이므로 선형종속이다. 따라서 3열은 1열과 2열에 의해 생성된 평면 위에 있다. 세 행렬  $A, C, R$ 은 모두 랭크가 2이다. 행렬곱  $CR$ 을 구하기 위해 앞서 살펴본 (열)  $\times$  (행) 방법을 이용하면 다음과 같다.

$$(C \text{의 열}) \times (R \text{의 행}) \quad CR = a_1[1 \ 0 \ 3] + a_2[0 \ 1 \ 4] = [a_1 \ a_2 \ 3a_1 + 4a_2] = A$$

행렬곱  $AB = C$ 를 계산하는 4가지 방법 :  $(3 \times 2)(2 \times 4) = (3 \times 4)$

**① 내적 방법**

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (A \text{의 } i \text{행}) \cdot (B \text{의 } k \text{열}) \\ i=1, 2, 3 \quad k=1, \dots, 4 \end{matrix} \quad = \text{수 } C_{ik} \quad (12 \text{개의 수})$$

**② 열 방법**

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} A \times (B \text{의 } k \text{열}) \\ k=1, \dots, 4 \end{matrix} \quad = C \text{의 } k \text{열} \quad (4 \text{개의 열})$$

**③ 행 방법**

$$\begin{bmatrix} \text{---} \\ x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (A \text{의 } i \text{행}) \times B \\ i=1, 2, 3 \end{matrix} \quad = C \text{의 } i \text{행} \quad (3 \text{개의 행})$$

**④ (열)  $\times$  (행) 방법**

$$\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x & x \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (A \text{의 } j \text{열})(B \text{의 } j \text{행}) \\ j=1, 2 \end{matrix} \quad = \text{랭크 1 행렬} \quad (2 \text{개의 행렬})$$



## 1.4 연습문제

1.  $AB = C$ 와 같은 행렬곱을 구하는 4가지 방법의 표를 작성하라. 단,  $A$ 는  $m \times n$  행렬이고,  $B$ 는  $n \times p$  행렬이다.  $AB = C$ 를 계산하기 위해 얼마나 많은 내적 계산, 열과 행, 랭크 1 행렬이 필요한가? 4가지 방법 모두에서 곱셈은 총  $mnp$ 번이다.

2.  $A = [a \ a \ a]$ 와 같이 행렬  $A$ 의 모든 열이 동일하고  $a \neq 0$ 일 때,  $C$ 와  $R$ 을 구하라.

3. 내적((행)  $\cdot$  (열))을 이용해 다음 행렬곱을 계산하라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3]$$

4. 주어진 행렬에 대해 결합법칙  $(AB)C = A(BC)$ 가 성립하는지 판정하라.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1]$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 7개의 열과 4개의 행을 가진 행렬  $A$ 가 5개의 선형독립인 열을 갖는 것이 불가능한 이유는 무엇인가? 이 문제는 꽤 유용하다.

6. 왼쪽 열에서 오른쪽 열로 이동하면서 행렬  $A$ 의 각 열의 선형결합이 이전 열들의 선형결합이 아닌 경우, 그 열을 행렬  $C$ 의 빈칸에 채워라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ 1 & & & & \\ 3 & & & & \end{bmatrix}$$

7. [문제 6]에서  $A = CR$ 이 되게 하는 행렬  $R$ 을 구하라. 행렬  $C$ 의 열이  $r$ 개이면 행렬  $R$ 의 행도  $r$ 개이다. 행렬  $R$ 의 5개 열은 행렬  $C$ 의 열에서 행렬  $A$ 의 5개 열을 생성하는 방법을 알려준다.

8. 행렬  $A$ 는 3개의 선형독립인 열을 갖는다. 따라서 행렬  $C$ 도 동일한 3개의 열을 갖는다.  $A = CR$ 이 되게 하는 행렬  $R$ 은 무엇인가? 또  $B = CR$ 이라 할 때는 무엇이 달라지는가?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$



9.  $A$ 를  $4 \times 4$  랜덤행렬이라 가정하자. 행렬  $A$ 의 열들이 '선형독립'일 확률은 1이다. 이 경우  $A = CR$ 에서 행렬  $C$ 와  $R$ 의 특징에 대해 설명하라.

**[참고] 랜덤행렬 이론**(random matrix theory)은 응용 선형대수학에서 아주 중요하다(특히 매우 큰 행렬의 곱셈  $AB$ 의 계산이 복잡한 경우). '확률 1'의 예로는 무작위로 2개의 수를 선택하는 것이 있다. 2개의 수를 무작위로 선택할 확률은 1인 것처럼 보이지만, 실제로 두 수는 같을 수도 있다. [문제 10]은 이러한 유형의 또 다른 예이다.

10.  $A$ 를  $4 \times 5$  랜덤행렬이라 가정하자. [문제 9]를 참고하여  $A = CR$ 에서 확률 1인 경우에 대한  $C$ 와  $R$ 의 특징에 대해 설명하라. 특히 왼쪽 열에서 오른쪽 열로 이동하면서 행렬  $A$ 의 열을 행렬  $C$ 에 포함시킬 때, 행렬  $A$ 의 어떤 열이 이전 열들과 선형독립일까?
11. 랭크가  $r = 2$ 인  $4 \times 4$  행렬  $A$ 를 하나 만들어라. 그다음 이 행렬을  $A = CR$  형태로 분해하라. 단,  $C$ 는  $4 \times 2$  행렬이고,  $R$ 은  $2 \times 4$  행렬이다.
12. 다음과 같은 행렬을  $A = CR$ 과 같이 분해하라. 단,  $C$ 는  $m \times r$  행렬,  $R$ 은  $r \times n$  행렬이고  $A$ ,  $C$ ,  $R$ 의 랭크는 모두 2이다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

13.  $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $R = [2 \ 4]$ 일 때,  $CR$ ,  $RC$ ,  $CRC$ ,  $RCR$ 을 구하라.
14. 아래 조건을 만족하는  $2 \times 2$  행렬  $A$ 를 작성하라.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & \end{bmatrix}$$

랭크 1

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & \end{bmatrix}$$

수직인 열

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

랭크2

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ & -3 \end{bmatrix}$$

$A^2 = I$

15.  $A = CR$ 이고 행렬  $C$ 는  $r$ 개의 선형독립인 열을 가지며 행렬  $R$ 은  $r$ 개의 선형독립인 행을 갖는다고 가정하자. 이때  $A = CR = (m \times r \text{ 행렬})(r \times n \text{ 행렬})$ 을 구성하기 위한 다음의 각 단계에 대해 설명하라.

[1단계] 행렬  $A$ 의 모든 열은 행렬  $C$ 의 열들의 선형결합이다.

[2단계] 행렬  $A$ 의 모든 행은 행렬  $R$ 의 행들의 선형결합이다. 행렬  $A$ 의 1행은 어떤 행들의 선형결합인가?

[3단계] (행렬  $C$ 의 열의 개수) = (행렬  $R$ 의 행의 개수)

[4단계] 열 랭크는 행 랭크와 같다. 행렬  $A$ 의 선형독립인 열의 개수는 행렬  $A$ 의 선형독립인 행의 개수와 같다.



16. 다음 물음에 답하라.

- (a) 벡터  $ABx$ 는 행렬  $AB$ 의 열공간을 생성한다. 벡터  $ABx$ 가 왜 행렬  $A$ 의 열공간에도 포함되는지를 증명하라. ( $ABx = Ay$ 를 만족하는 벡터  $y$ 가 존재하는가?) 결론적으로 행렬  $A$ 의 열공간은 행렬  $AB$ 의 열공간을 포함한다.
- (b) 행렬  $AB$ 의 열공간이 오직 영벡터만 갖게 하는 영행렬이 아닌 행렬  $A$ 와  $B$ 를 구하라(영벡터는 가장 작은 열공간이고, 영행렬은 모든 성분이 0인 행렬이다).

17. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하고, 그 이유를 설명하라.

- (a)  $3 \times 3$  행렬  $A, B$ 의 랭크가 모두 1일 때,  $AB$ 의 랭크는 1이다.
- (b)  $3 \times 3$  행렬  $A, B$ 의 랭크가 모두 3일 때,  $AB$ 의 랭크는 3이다.
- (c) 모든  $2 \times 2$  행렬  $B$ 에 대해  $AB = BA$ 이면,  $A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = cI$ 이다(단,  $c$ 는 어떤 상수이다).  
 $A = cI$ 일 때만 모든 행렬  $B$ 에 대해 교환법칙이 성립한다.

18. 이 장에서는 결합법칙  $(AB)C = A(BC)$ 의 특별한 예를 다음과 같이 언급했다.

$$A = C = \text{교환행렬} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- (a) 먼저  $AB$ 를 계산(행 교환)하고,  $BC$ 를 계산(열 교환)하라.
- (b) 이제 이중교환을 계산해보자. 행을 먼저 교환하는  $(AB)C$ 와 열을 먼저 교환하는  $A(BC)$ 를 각각 계산하고 두 결과가 동일함을 확인하라.

19. 식 (16)에 있는 (열) $\times$ (행)을 이용해 다음  $AB, BA$ 를 계산하라.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

20. 행렬의 크기가  $ABC = (4 \times 3)(3 \times 2)(2 \times 1)$ 일 때,  $(AB)C$ 와  $A(BC)$ 를 계산하는 데 몇 번의 곱셈이 필요한가? 참고로 두 경우의 횟수는 다르다.



## 1장에 대한 고찰

대부분의 교재에는 저자의 생각을 담을 수 있는 공간이 없다. 그러나 이번 6판을 시작하는 데 많은 결정을 하여 별도의 공간을 마련했다. 이 장에서는 의도적으로 선형독립성과 랭크에 대해 논의했다. 이번 집필을 하는 데 큰 영향을 미친 2가지 질문은 다음과 같다.

이 과목을 쉽게 만드는 것은 무엇인가?      모든 방정식은 선형이다.

이 과목을 어렵게 만드는 것은 무엇인가?      수많은 방정식과 미지수, 아이디어

이 책에서 다루는 예들은 크기가 작다. 그러나 예를 들어 엔진의 여러 지점에서의 온도를 구하고자 할 때, 모든 지점에서 방정식이 존재한다. 따라서 쉽게 말하면  $n = 1,000$ 개의 미지수가 만들어진다.

핵심은 행렬로 한번에 처리하는 것이라고 생각한다.  $Ax = b$ 는 모든 크기의 문제를 수용하는 데 완벽한 형식이다. 선형성은 기호  $Ax$ 에 내재되어 있고, 선형성의 규칙은  $A(x + y) = Ax + Ay$ 이다.  $Ax = b$ 의  $m$ 개의 방정식은 다음과 같이 각각 평면을 나타낸다.

$2x + 5y - 4z = 6$ 은 3차원 공간의 평면이다.

$2x + 5y - 4z + 7w = 9$ 는 4차원 공간의 3차원 평면(초평면?)이다.

10개의 평면이 11차원 공간에서 만나는 것을 시각화하는 데는 심각한 문제가 있다. 희망사항은 그 평면들이 직선을 따라 만나는 것이다(차원  $11 - 10 = 1$ ). 11번째 평면은 한 점에서 그 직선을 자르면서 통과해야 한다(그러면 11개의 방정식이 해결된다).

다음은  $m \times n$  랜덤행렬  $A$ 에 대해 기대하는 바이다.

- $m < n$ 인 경우 : 아마도  $m$ 개의 방정식  $Ax = b$ 의 해가 많이 존재할 것이다.
- $m = n$ 인 경우 : 아마도 방정식  $Ax = b$ 의 해가 하나 존재할 것이다.
- $m > n$ 인 경우 : 아마도 해가 존재하지 않을 것이다. 방정식의 개수  $m$ 이 미지수의 개수  $n$ 보다 많다.

그러나 이 결과가 반드시 성립하는 것은 아니다. 행렬  $A$ 의 어떤 열은 이전 열들의 선형결합일 수 있기 때문이다. 즉 새로운 방정식이 아니다. 어떤 방정식은 이전 방정식들의 선형결합일 수 있다. 랭크  $r$ 은 방정식 문제의 실제 크기를 알려준다. 아름다운 공식은 랭크  $r$ 을 갖는 3개의 행렬  $A$ ,  $C$ ,  $R$ 로 나타낼 수 있다( $A = CR = (m \times r)(r \times n)$ ). 주의할 점은 행렬  $A$ 의 열 중에서 행렬  $C$ 에 그대로 들어간 열은 행렬  $R$ 의 내부에 있는 항등행렬  $I$ 와 곱해진다는 것이다.



이제 마지막으로 아주 중요한 결합법칙  $(AB)C = A(BC)$ 를 살펴보자. 행렬  $C$ 에 하나의 열이 있다고 가정하면 다음과 같다.

- $AB$ 는 열  $Ab_1, \dots, Ab_n$ 을 갖고,  $(AB)c$ 는  $c_1Ab_1 + \dots + c_nAb_n$ 이다.
- $Bc$ 는 1개의 열  $c_1b_1 + \dots + c_nb_n$ 을 갖고,  $A(Bc) = A(c_1b_1 + \dots + c_nb_n)$ 이다.
- 선형성에 따라 두 합은 같다. 따라서  $(AB)c = A(Bc)$ 이다.
- 행렬  $C$ 의 모든 열에 대해서도 성립한다. 따라서  $(AB)C = A(BC)$ 이다.

주의할 점은  $Ax, AB, CR$ 에 대해 설명할 때, 행렬  $A$  또는  $C$ 의 열들의 선형결합을 이용한다는 것이다. 즉 행들의 내적으로 설명하지 않는다.