

5

행렬식

5.1 3×3 행렬식과 여인수

5.2 행렬식의 계산과 응용

5.3 행렬식을 이용한 넓이와 부피 계산

정사각행렬의 **행렬식**(determinant)은 아주 놀라운 수이다. 행렬식이 $\det A = 0$ 이면 행렬 A 의 열 벡터가 선형종속이라서 A 는 비가역행렬이 된다. 만약 $\det A \neq 0$ 이면 A^{-1} 의 공식에 행렬식으로 나누는 연산이 포함된다. 5.1절에서는 먼저 3×3 행렬식을 구하고, $\det A$ 와 역행렬을 계산하기 위한 ‘여인수 공식’을 다룬다.

$\det A$ 를 구하는 3가지 유용한 방법이 있다. 첫 번째 방법은 소거 과정 이후에 식 $PA = LU$ 에서 행렬 U 의 피벗들을 곱하는 것이다. 항상 $\det P = 1$ 또는 -1 이고 $\det L = 1$ 이다. 그러므로 행렬 U 의 피벗들의 곱은 $\det A$ 또는 $-\det A$ 이다. 이 방법이 보통 가장 빠른 방법이다.

두 번째 방법은 크기가 $n-1$ 인 행렬 A 의 행렬식(즉 A 의 **여인수**(cofactor))을 이용하는 것이다. 이 방법은 역행렬 A^{-1} 를 구하는 공식으로 이어진다. A^{-1} 의 (i, j) 성분은 (j, i) 여인수를 $\det A$ 로 나눈 것이다.

$\det A$ 를 구하는 세 번째 방법은 $n!$ 개의 항을 더하는 것이다. 각 항은 행렬의 위에서 아래로 향하는 경로를 내려가면서 성분들을 곱한 것이다. 이때 모든 행과 열에서 단 하나의 성분만 선택하여 총 n 개의 성분을 곱함으로써 하나의 항을 구성한다. 각 항의 부호는 열들을 교환한 횟수가 홀수일 때만 바꾼다. 예를 들어 3×3 행렬은 6개의 경로를 가지므로 6개의 항이 생긴다.

5.2절에서는 $\det AB = (\det A)(\det B)$ 와 같은 행렬식의 중요한 성질을 다룬다. 이 중요한 성질을 증명하기 위해, 행렬식의 기초가 되는 3가지 간단한 성질로 시작한다. 이 3가지 성질로부터 $Ax = b$ 의 해를 구하는 **크레이머 규칙**(Cramer's rule)을 비롯한 나머지 모든 성질들이 유도된다.

5.3절에서는 기하학으로 넘어가 n 차원의 기울어진 상자(tilted box), 즉 **평행육면체**의 부피에 대해 다룬다. 에지행렬(edge matrix) E 의 열벡터는 $(0, \dots, 0)$ 에서 뻗어나가는 n 개의 에지(edge)를 나타낸다. 그러면 평행육면체의 부피는 $|\det E|$ 가 된다. 이 사실은 기하학과 선형대수학을 연결한다.

이 장에서는 다양한 공식을 다룬다. $n \times n$ 행렬 A 를 n 차원 공간의 도형을 구성하는 모든 점에 곱하면 또 다른 도형이 만들어진다. 예를 들어 정육면체는 평행육면체로, 원은 타원으로, 구는 타원체로 바뀔 수 있다. 변환된 도형의 부피를 원래 도형의 부피로 나누면 항상 $|\det A|$ 이다. 행렬식은 계산이 그리 어렵지만 많다면 우리에게 많은 정보를 알려준다.

5.1 3×3 행렬식과 여인수

1. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 의 행렬식은 $ad - bc$ 이다. 특이행렬 $\begin{bmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{bmatrix}$ 의 행렬식은 0이다.
2. 행 교환은 부호를 바꾼다. 행 교환행렬 P 를 곱한 $PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ 의 행렬식은 $\det PA = bc - ad = -\det A$ 이다.
3. $\begin{bmatrix} xa+yA & xb+yB \\ c & d \end{bmatrix}$ 의 행렬식은 $x(ad - bc) + y(Ad - Bc)$ 이다. 행렬식은 1행에 대해 선형적이다.
4. 3×3 행렬식은 식 (1)과 같이 $3! = 6$ 개의 항을 갖는다. 이 항들은 식 (4)와 같이 여인수를 이용하면 3개의 항으로 분리된다. 이 여인수들을 $\det A$ 로 나누면 식 (7)의 A^{-1} 가 된다.

행렬식의 공식은 매우 아름답지만 계산하기는 쉽지 않다. 이 절에서는 3×3 행렬만 다루며, 행렬식으로 역행렬 A^{-1} 를 유도할 것이다(A^{-1} 를 구하는 공식은 1~4장에서 다루지 않았다). 일단 다음과 같이 2×2 행렬로 시작해보자.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1, \quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc, \quad \det \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = bc - ad$$

위 4가지 예는 중요한 규칙을 보여준다. 우선 두 행을 교환하면 행렬식의 부호가 바뀐다(두 열을 교환하는 경우도 마찬가지이다). 이 규칙은 다른 크기의 행렬에도 적용된다. 또한 행렬식이 0이면 역행렬은 존재하지 않는다.

2×2 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 에서 $\det A = 0$ 이면 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 이다. 즉 행렬의 열들이 서로 평행하다. $n \times n$ 행렬의 경우, $\det A = 0$ 은 행렬 A 의 열들이 선형독립이 아님을 의미한다. 즉 어떤 열들의 선형결합이 영벡터가 될 수 있다($x \neq 0$ 일 때 $Ax = 0$). 그러면 A 는 비가역행렬이다. 이제 행렬식을 정의한 다음, 더 많은 성질에 대해 알아보자.

3×3 행렬식

2×2 행렬의 행렬식은 $ad - bc$ 로 계산하기 쉽지만 4×4 행렬은 계산하기가 쉽지 않다. 이 경우에는 소거법(혹은 컴퓨터)을 이용하는 것이 좋다. 3×3 행렬의 행렬식에는 $3! = 6$ 개의 항이 있으므로 직접 손으로 계산할 수 있다. 이제 그 계산법에 대해 알아보자. 참고로 모든 치환행렬의 행렬식은 1 또는 -1 이다.

행렬식($\det I = 1$)로 시작하여 두 행을 교환하면 행렬식은 -1 이 된다. 여기서 다시 한 번 행을 교환하면 행렬식은 $+1$ 이 된다. 이와 같은 방식으로 6개의 치환행렬을 모두 만들 수 있다. 즉 행의 교환은 다음과 같이 행렬식의 부호를 바꾼다($+1$ 에서 -1 로, 혹은 -1 에서 $+1$ 로).

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$\det = +1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad -1$

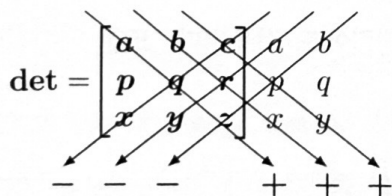
행렬 A 의 두 행을 교환하면, 예를 들어 1행과 2행을 교환하면 행렬식의 부호가 바뀐다. 이 성질을 모든 행렬식에 대해 적용한다. 다시 말해 행 교환은 $\det A$ 에 -1 을 곱하는 것이다.

위 행렬의 각 행에 어떤 수를 곱하면 행렬식은 이 수들을 곱한 값이다. 3개의 행을 차례대로 abc , pqr , xyz 라 가정하자. 그러면 행렬식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} a & & \\ & q & \\ & & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & b & \\ p & & \\ & & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & b \\ & r & \\ x & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & c \\ & q & & \\ x & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & c \\ p & & & & \\ & y & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & & & & \\ & y & & & r \end{bmatrix}$$

$\det = +aqz \quad -bpz \quad +brx \quad -cqx \quad +cpy \quad -ary$

마지막으로 가장 강력한 성질은 행렬 A 의 행렬식이 각 행에 대해 선형적이라는 것이다. 나중에 식 (4)에서 살펴보겠지만, 위와 같은 6개 행렬식을 더할 수도 있다. 다음 그림의 화살표를 따라가면 각 항의 부호를 쉽게 기억할 수 있다.



6개의 간단한 행렬식을 조합하면 $\det A$ 가 된다.

$$+ aqz + brx + cpy - ary - bpz - cqx \quad (1)$$

여기서 주의할 점은, 6개의 항이 모두 각 행에서 하나의 성분만 포함한다는 것이다. 또한 각 열에서도 하나의 성분만 포함한다. 3×3 치환행렬은 6개 존재할 수 있으므로, $\det A$ 에는 $6 = 3!$ 개의 항이 존재한다. 이와 비슷하게 4×4 행렬식은 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 개의 항을 갖는다.

이제 크기 1, 2, 3, 4인 경우의 예를 살펴보자. 저자가 가장 선호하는 행렬은 주대각선에 2가 있고 주대각선의 위와 아래에는 -1 이 있는 형태의 행렬이다. 다음은 $n = 1, 2, 3$ 인 경우의 예이다.

$$A_1 = [2]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1 = 2$$

$$\det A_2 = 4 - 1 = 3$$

$$\det A_3 = 8 - 2 - 2 = 4$$

$\det A_3 = 4$ 일 때의 6개의 항은 무엇인가? 주대각선으로부터 얻는 하나의 항은 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ 이고 나머지 5개의 항은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & -1 & \\ & -1 & \\ 0 & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 0 \\ -1 & & \\ & -1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{각각의 행렬식은} \\ -2, -2, 0, 0, 0 \end{array}$$

따라서 6개 항의 행렬식을 모두 더하면 $8 - 2 - 2 = 4$ 이고, 이 값이 $\det A_3$ 이다. 규칙을 잘 살펴보자. $n! = 3! = 6$ 개의 각 항은 모든 행과 열에서 각각 하나의 성분만을 가져온다. 만약 이 성분들 중 하나라도 0이면 그 항은 0이 된다. 행렬 안에 0이 많을수록 $\det A$ 의 계산은 훨씬 쉬워진다.

이제 24개의 항을 갖는 4×4 행렬 A_4 로 넘어가자. 4×4 행렬식은 두 3×3 행렬식으로부터 만들어진다.

$$A_4 = \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & -1 & & \\ \hline -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{array} \right] \quad \det A_4 = 2 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - (-1) \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

2, 3, 4행으로 만들어지는 3×3 행렬식은 1행의 2, -1의 여인수이다.

여기서 주의할 점은, 행렬 A_4 의 1행에 있는 수 2는 다른 행들로부터 만들어지는 3×3 행렬식에 곱한다는 것이다. 이때 각 항은 모든 행과 모든 열에서 하나만 가져온다. 2는 1행, 1열에서 가져온 수이다. 따라서 2는 2, 3, 4행과 2, 3, 4열로 만들어지는 3×3 행렬식에 곱한다. 이렇게 만들어진 3×3 행렬이 바로 행렬식이 4인 행렬 A_3 이다.

식 (2)의 마지막 3×3 행렬식도 행렬 A_4 의 2, 3, 4행을 사용한다. 행렬식 앞에 곱해진 수 -1은 1행, 2열에서 가져온 수이다. 따라서 해당 3×3 행렬식은 1, 3, 4열에서 가져와야 한다. 이렇게 만들어진 3×3 행렬의 행렬식이 -3이다(직접 확인하라). 결과적으로 행렬 A_4 의 전체 행렬식은 $8 - 3 = 5$ 가 된다.

마지막으로 1, 3, 4열에서 가져온 3×3 행렬식에 대해 알아두어야 할 사실이 있다. 식 (2)에서 이 행렬식은 행렬 A_4 의 1행, 2열에 있는 수 -1과 곱해진다. 그러나 식 (2)에는 또 하나의 '수수께끼 같은 -1(음수 부호)'이 있다. 이 음수 부호는 왜 발생하는 것인가? 그 이유는 1행, 2열의 위치가 -(음수 부호) 위치이기 때문이다(1 + 2가 홀수이므로). 앞서 살펴본 2×2 행렬식의 경

우에 부호 규칙은 다음과 같다(bc 앞에 음수 부호가 있다).

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = ad - bc \quad (3)$$

A_1, A_2, A_3, A_4 의 행렬식은 각각 2, 3, 4, 5이다. 따라서 $\det A_5 = 6$ 이라고 추측할 수 있다. 실제로 앞서 살펴본 아이디어를 적용하면 $\det A_5 = 2 \cdot \det A_4 - \det A_3 = 2 \cdot 5 - 4 = 6$ 이다. 이와 관련한 설명은 나중에 한다.

여인수와 A^{-1} 의 공식

aqz 와 같은 항을 6개 가진 3×3 행렬식과 관련하여, 행렬식과 역행렬에 대한 ‘여인수 공식’이 있다. 이 공식의 아이디어는 3×3 행렬을 2×2 행렬로 축소하는 것이다. $\det A$ 의 6개 항들 중 2개는 1행의 a 로 시작하고, 다른 2개는 1행의 b 로 시작하며, 또 다른 2개는 1행의 c 로 시작한다.

여인수 공식
 3×3 행렬

$$\det A = a(qz - ry) + b(rx - pz) + c(py - qx) \quad (4)$$

식 (4)의 각 항에서 1행의 a, b, c 를 분리해 3개의 여인수를 얻었다. 각 여인수는 2×2 행렬식이다. 1행, 1열에 있는 성분 a 는 2, 3행과 2, 3열로 만들어지는 여인수(2×2 행렬식)를 갖는다. 앞서 언급했듯이, 각 행과 열의 성분은 한 번만 사용된다. 1행, 2열에 있는 성분 b 는 여인수 $rx - pz$ 를 갖는다. 이때 사용된 행과 열은 2, 3행과 1, 3열이다. 그러나 실제 2×2 행렬식은 $pz - rx$ 여야 한다. 여인수 C_{12} 의 부호($\pm$)가 바뀌었는데, 그 이유는 $1+2$ 가 홀수이기 때문이다.

여인수 C_{ij} 의 정의와 $(-1)^{i+j}$ 부호 규칙은 다음과 같다.

- (i, j) 여인수 C_{ij} 를 계산하기 위해, 행렬 A 에서 i 행, j 열을 제거한다.
- C_{ij} 는 $(-1)^{i+j}$ 와 (제거하고 남은 크기가 $n-1$ 인 행렬의 행렬식)의 곱이다. (5)
- i 행에 대한 여인수 공식은 $\det A = a_{i1}C_{i1} + \dots + a_{in}C_{in}$ 이다.

핵심은 $\det A$ 를 계산할 때, a_{ij} 에 곱해지는 수가 바로 여인수 C_{ij} 라는 사실이다. 2×2 행렬의 여인수는 $(-1)^{i+j}$ 와 1×1 행렬식 d, c, b, a 의 곱이다. 이때 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 의 여인수는 여인수행렬(cofactor matrix) $C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ 안에 있다. 놀라운 사실은 A 와 C^T 의 곱은 $\det A$ 와 I 의 곱과 같다는 것이다.

$$AC^T = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I \quad (6)$$

식 (6)을 $\det A$ 로 나누면, 다음과 같이 역행렬 A^{-1} 를 구하는 공식을 얻는다.

$$\text{역행렬 공식} \quad A^{-1} = \frac{C^T}{\det A} \quad (7)$$

식 (7)은 이 공식은 가역행렬의 행렬식이 0이 아닌 이유를 보여준다. 행렬 C^T 는 $\det A$ 로 나누어야 한다. 역행렬 A^{-1} 의 모든 성분은 두 행렬식의 비율, 즉 $\frac{(C^T \text{ 안의 크기 } (n-1) \text{ 인 여인수})}{(\text{크기 } n \text{ 인 } \det A)}$ $\det A$ 이다.

식 (8)의 예는 행렬식이 1인 경우이다. 따라서 A^{-1} 는 정확히 $C^T =$ 수반행렬(adjugate matrix)¹이다. C_{32} 가 3행과 2열을 제거한다는 점에 주목하자. 제거하고 나면 행렬식이 1인 2×2 행렬이 남는다. $(-1)^{2+3} = -1$ 이므로, 이는 C^T 에서 -1 이 된다. 이 값은 2행 3열 위치로 들어간다.

$$\begin{array}{l} A^{-1} \text{의 예} \\ (\text{행렬식}) = 1 \\ \text{여인수행렬 } C^T \end{array} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{C^T}{1} \quad (8)$$

행렬 AC^T 의 주대각성분은 항상 $\det A$ 이다. 이 결과가 바로 여인수 공식 (5)이다. [연습문제 18]에서는 AC^T 의 주대각성분이 아닌 성분들이 왜 항상 0인지를 보일 것이다. 이 수들은 서로 동일한 두 행을 가진 행렬의 행렬식이 되기 때문에 자동으로 0이 된다.

여인수 C_{31} 은 3행, 1열을 제거하고 계산한다. 이 계산에 따라 식 (8)의 3×3 행렬에서 1로만 이루어진 2×2 행렬만 남는다. 이 2×2 행렬의 행렬식은 0이다. 이 값이 역행렬 A^{-1} 의 1행 3열 위치에 있는 0이다. 행렬 A 에서 $2A$ 로 2배가 되면 행렬식은 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ 배가 된다. 여인수행렬 C 안의 모든 여인수는 $2 \cdot 2 = 4$ 배가 된다. 따라서 $(2A)^{-1} = \frac{4C^T}{8\det A} = \frac{A^{-1}}{2}$ 가 된다.

- 1, 2, -1 삼중대각행렬

여인수 공식에서 $n \times n$ 행렬식은 크기가 $(n-1)$ 인 여인수들로 줄여서 계산한다. 삼중대각행렬인 -1, 2, -1 행렬²은 1행에 0이 아닌 성분이 단 2개(2와 -1)뿐이므로 좋은 예가 된다. 따라서

1 (편집자) 여인수행렬의 전치행렬을 수반행렬이라 한다.

2 (편집자) 주대각선에 2가 있고 주대각선의 위와 아래에는 -1이 있는 형태의 행렬로 앞서 언급한 바 있다.

행렬식을 구할 때 1행에 대해 단지 2개의 여인수만 계산하면 되고, 이에 따라 A_{n-1} 과 A_{n-2} 가 나온다. 이제 다음과 같이 $-1, 2, -1$ 행렬 A_n 의 행렬식을 통해 이 과정을 살펴보자.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} - 1 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

위 식의 우변에서 첫 번째 항은 $2\det A_{n-1}$ 이다. 두 번째 항에는 행렬 A_n 의 $(1, 2)$ 위치에 있는 -1 이 있다. 두 번째 항에는 $(-1)^{1+2} = -1$ 도 있는데, 이는 모든 여인수에 있는 부호 $(-1)^{i+j}$ 에 해당한다. 마지막 여인수의 $(1, 1)$ 위치에 -1 이 있으므로, 결국 두 번째 항에서 3개의 -1 이 생긴다. A_n 의 마지막 여인수는 크기가 $n-2$ 인 자기 자신의 여인수를 보여준다. 이 행렬이 바로 A_{n-2} 이다.

$$\det A_n = 2\det A_{n-1} - \det A_{n-2} \quad (9)$$

앞서 직접 계산을 통해 $n=1, 2, 3, 4$ 에 대해 $\det A_n = 2, 3, 4, 5$ 임을 확인했다. 이 결과는 $\det A_4 = 5 = 2 \cdot 4 - 3$ 이 되는 것처럼 식 (9)에 잘 들어맞는다. 그러나 이제 모든 n 에 대해 $\det A_n = n+1$ 이 됨을 알아냈다. 이때 $n+1 = 2n - (n-1)$ 이므로, 이 결과 역시 식 (9)와 일치한다.

여인수 공식은 행렬의 많은 성분이 0일 때 사용하기 편리하다. 그래야 항의 개수가 적어지기 때문이다. 0이 아닌 성분이 많은 행렬의 경우에는 또 다른 좋은 방법이 있다. 이 방법은 소거법을 적용하여 L 과 U 에서 쉽게 행렬식을 계산하는 것이다.

5.1 연습문제

※ [문제 1~5]는 행렬식의 규칙에 관한 문제이다.

1. 4×4 행렬 A 의 행렬식은 $\det A = \frac{1}{2}$ 이다. $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$, $\det(A^{-1})$ 를 구하라.
2. 3×3 행렬 A 의 행렬식은 $\det A = -10$ 이다, $\det\left(\frac{1}{2}A\right)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$, $\det(A^{-1})$ 를 구하라.
만약 $\det A = 0$ 이면 답은 어떻게 바뀌는가?

3. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라(참이면 이유를 제시하고, 거짓이면 반례를 찾으라).
- (a) $I + A$ 의 행렬식은 $1 + \det A$ 이다.
- (b) $4A$ 의 행렬식은 $4\det A$ 이다.
- (c) $AB - BA$ 의 행렬식은 0이다. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 을 예로 사용하라.
4. 행을 교환하면 $\det A$ 의 부호가 바뀐다. 어떤 행을 교환해야 다음과 같은 '반대 항등행렬(reverse identity matrix)' J_3 와 J_4 가 $|J_3| = -1$, $|J_4| = +1$ 을 만족함을 보일 수 있는가?

$$\det J_3 = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1, \quad \det J_4 = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = +1$$

5. $n = 5, 6, 7$ 일 때, '반대 항등행렬' J_n 에서 행 교환을 몇 번 해야 항등행렬 I_n 이 되는가? 모든 $\det J_n$ 에 대한 규칙을 만들고, J_{101} 의 행렬식이 +1인지 -1인지를 예측하라.
6. 본문의 식 (1)에서 $+aqz$ (주대각선), $-cqx$ (역대각선)와 같은 6개의 항을 찾으라. 그리고 이 6개의 항을 결합하여 다음 행렬 A, B, C 의 행렬식을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

7. (1행) = $[a \ b \ c]$ 를 (2행) = $[p \ q \ r]$ 에 더하여 새로운 2행 $[p+a \ q+b \ r+c]$ 를 얻었다. $\det A$ 에 대한 식 (1)을 이용해 원래 행렬과 새로운 행렬의 3×3 행렬식이 변하지 않음을 보여라. 다음은 이 사실을 보이는 또 다른 방법이다.

$$\det \begin{bmatrix} \text{(1행)} \\ \text{(1행)} + \text{(2행)} \\ \text{(3행)} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \text{(1행)} \\ \text{(1행)} \\ \text{(3행)} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \text{(1행)} \\ \text{(2행)} \\ \text{(3행)} \end{bmatrix} = 0 + \det \begin{bmatrix} \text{(1행)} \\ \text{(2행)} \\ \text{(3행)} \end{bmatrix}$$

8. $\det A^T = \det A$ 임을 보여라. 이를 증명할 때 A 와 A^T 의 3×3 행렬식은 bx 형태의 동일한 6개 항의 합이라는 사실을 이용하라. 당연히 모든 치환행렬 P 에 대해서도 $\det P^T = \det P$ 가 성립한다.
9. 다음 행렬의 행렬식은 0, 1, 2, 3 중 무엇인가?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. 행렬 A 의 모든 행에 대해 각 행의 성분들을 모두 더하면 0일 때, $Ax = 0$ 을 풀어서 $\det A = 0$ 임을 증명하라. 만약 각 행의 성분들을 모두 더할 때 1이 되면 $\det(A - I) = 0$ 임을 보여라. 이는 $\det A = 1$ 임을 의미하는가?
11. P_i 가 치환행렬인 경우, $\det(P_1 P_2) = (\det P_1)(\det P_2)$ 가 성립하는가? 항등행렬 I 에 도달하기 위해 P_1 는 2번의 행 교환이 필요하고, P_2 는 3번의 행 교환이 필요하다면, 왜 $P_1 P_2$ 는 I 에 도달하기 위해 $(2+3)$ 번의 행 교환이 필요한가? 그러면 주어진 행렬식 계산은 $(-1)^5 = (-1)^2(-1)^3$ 이 된다.
12. 왜 5×5 치환행렬들 중 절반은 ($\det P = 1$ 을 만족하는) 짝수 치환행렬이 되는지 설명하라.
13. 랭크 1 행렬 A 와 반대칭행렬 B 의 행렬식을 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ -4 \ 5], \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

14. 행렬 A 의 (i, j) 성분이 $i \times j$ 일 때, $\det A = 0$ 임을 보여라(단, $A = [1]$ 인 경우는 제외). 또한 행렬 A 의 (i, j) 성분이 $i + j$ 일 때, $\det A = 0$ 임을 보여라(단, $n = 1$ 또는 2인 경우는 제외).
15. 4×4 행렬 A 가 $\det A = 0$ 을 만족하도록 최소의 0을 배치한 행렬 A 를 구하라. 또한 $\det A \neq 0$ 을 만족하도록 가능한 한 최대의 0을 배치한 행렬 A 를 구하라.
16. 모든 여인수가 0이면 행렬 A 의 역행렬이 존재하지 않음을 어떻게 알 수 있는가? 모든 여인수가 0이 아니면 A 는 항상 가역행렬인가?
17. (두 행이 동일한 경우의 여인수 공식) 3×3 행렬에서 (1행) = (2행) = a, b, c 일 때, $\det A$ 의 6개 항을 모두 작성하라. 행렬식은 0이 되어야 한다.
18. 두 행이 동일한 행렬은 왜 특이행렬인가? 이 경우 $\det A = 0$ 이 된다. 어떤 행에 대한 여인수와 다른 행에 있는 수를 결합하면, 동일한 행을 가진 행렬 A^* 의 행렬식 $\det A^*$ 를 계산할 수 있다. 이 경우 $\det A^* = 0$ 이다. 이 결과가 $AC^T = (\det A)I$ 의 주대각성분이 아닌 모든 성분이 0이 되는 이유이다.
19. 여인수 공식 $AC^T = (\det A)I$ 를 이용해 $\det C = (\det A)^{n-1}$ 임을 보여라.
20. $\det A = 10$ 이고 행렬 A 의 모든 여인수를 알고 있다고 할 때, 행렬 A 는 어떻게 구할 수 있는가?

5.2 행렬식의 계산과 응용

1. 유용한 사실 : $\det A^T = \det A$, $\det AB = (\det A)(\det B)$, $|\det Q| = 1$
2. 소거행렬 E 의 행렬식은 $\det E = 1$ 이므로, $\det EA = \det A$ 이다.
3. 크레이머 규칙은 행렬식의 비율로 $x = A^{-1}b$ 를 구한다(느린 방법).
4. $\det A = \pm (A = LU$ 의 피벗들의 곱)이다(훨씬 빠른 방법).
5. $\det A$ 에 대한 '큰 공식(big formula)'은 $n!$ 개의 치환행렬로부터 얻는 $n!$ 개의 항을 포함한다($n > 3$ 인 경우 매우 느린 방법).

정사각행렬의 행렬식은 많은 정보를 알려준다. 먼저 가역행렬 A 는 $\det A \neq 0$ 을 만족하고, 특이행렬 A 는 $\det A = 0$ 을 만족한다. $Ax = \lambda x$ 에서 고윳값 λ 와 고유벡터 x 는 고윳값 방정식 $(A - \lambda I)x = 0$ 을 만족한다. 즉 $A - \lambda I$ 가 특이행렬이고 $\det(A - \lambda I) = 0$ 이 된다. 이제 λ 에 관한 방정식을 얻었다.

전체적으로 보면, 행렬식의 공식은 작은 행렬이나 특수한 형태의 행렬에서 유용하다. 행렬식의 여러 성질을 적용하면 이러한 공식이 더 단순해진다. 예를 들어 행렬이 삼각행렬이나 대각행렬이라면, 다음과 같이 단순히 주대각성분들을 곱함으로써 행렬식을 계산할 수 있다.

$$\begin{array}{l} \text{삼각행렬} \\ \text{대각행렬} \end{array} \quad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ & q & r \\ & & z \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & & \\ & q & \\ & & z \end{bmatrix} = aqz \quad (1)$$

행렬 A 를 전치하더라도 행렬식은 변하지 않는다.

$$\text{전치행렬} \quad \det(A^T) = \det(A) \quad (2)$$

행렬곱 AB 의 행렬식은 행렬 A , B 각각의 행렬식의 곱이다.

$$\text{두 행렬의 곱} \quad \det(AB) = (\det A)(\det B) \quad (3)$$

식 (3)을 대수학적으로 증명하기는 어려우므로 기하학을 이용해 증명할 것이다.

두 행렬의 합에 대한 행렬식은 각 행렬에 대한 행렬식의 합이 아니다($n \times n$ 행렬 $I + I$ 로 확인해보면 $I + I$ 의 행렬식은 2가 아니라 2^n 이다). 식 (2), (3)으로부터 다음과 같은 또 하나의 결과를 얻을 수 있다.

직교행렬 Q 의 행렬식은 1 또는 -1 이다.

$Q^T Q = I$ 임을 이미 알고 있으므로, $(\det Q)^2 = (\det Q^T)(\det Q) = 1$ 이다. 따라서 $\det Q$ 는 ± 1 이다.

가역행렬 A 에 대해 $\det A = \pm(\text{피벗들의 곱})$ (4)

$A = LU$ 이면 $\det A = (\det L)(\det U) = \det U$ 이다. 삼각행렬 U 의 행렬식은 피벗들의 곱이다. $PA = LU$ 이면 행 교환이 존재하므로 $\det P = 1$ 또는 -1 이다(치환행렬). 주대각선 위의 피벗들의 곱 $U_{11}U_{22} \cdots U_{nn}$ 은 행렬 A 의 행렬식과 같다. 소거법은 선형대수학을 위한 거의 모든 컴퓨터 시스템에서 행렬식을 계산하는 방법이다. 2장에서 행렬 U 를 구하는 데 필요한 계산량은 $\frac{n^3}{3}$ 번의 곱셈이었다.

성질 (1)~(4)의 증명

앞서 살펴본 성질 (1)~(4)에 대한 증명은 다음과 같은 행렬식의 3가지 간단한 성질로부터 시작한다.

- ❶ $n \times n$ 항등행렬의 행렬식은 $\det I = 1$ 이다.
- ❷ 행렬 A 의 두 행을 교환하면 $\det A$ 는 $-\det A$ 로 부호가 바뀐다.
- ❸ (선형성) 행렬 A 의 1행이 선형결합 $cv + dw$ 이면, A 의 행렬식은 다음과 같이 두 행렬식의 선형결합이다.

$$\det \begin{bmatrix} cv + dw \\ (2\text{행}) \\ \vdots \\ (n\text{행}) \end{bmatrix} = c \cdot \det \begin{bmatrix} v \\ (2\text{행}) \\ \vdots \\ (n\text{행}) \end{bmatrix} + d \cdot \det \begin{bmatrix} w \\ (2\text{행}) \\ \vdots \\ (n\text{행}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

다시 말해 성질 ❸에서 ‘행렬식은 1행에 대해 선형적이다’. 그러면 성질 ❷에 따라 일반적으로 $\det A$ 는 모든 행에 대해 선형적이다. 행을 교환한 다음 다시 행을 교환할 수도 있다. 즉 1행이 특별한 것은 아니다.

성질 ❷로부터 유도되는 간단한 사실을 살펴보자. 행렬 A 의 두 행이 동일하면 A 의 행렬식은 0이다. 행렬 A 의 동일한 행을 교환해도 A 에는 아무런 변화가 없다. 그러면 $\det A = -\det A$ 이므로 $\det A = 0$ 이다.

이제 성질 ③을 살펴보자. j 행에서 i 행에 d 를 곱한 것을 빼도 $\det A$ 는 변하지 않는다.

$$\det \begin{bmatrix} (1\text{행}) \\ (2\text{행}) - d \cdot (1\text{행}) \\ (n\text{행}) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} (1\text{행}) \\ (2\text{행}) \\ (n\text{행}) \end{bmatrix} - d \begin{bmatrix} (1\text{행}) \\ (1\text{행}) \\ (n\text{행}) \end{bmatrix} = \det A \quad (6)$$

식 (6)은 1행이 고정된 상태에서 2행에 대해 선형적이다. A 를 상삼각행렬 U 로 바꾸는 소거 과정은 행렬식을 바꾸지 않는다. 따라서 (행 교환이 없는) 소거 과정은 행렬식을 바꾸지 않고 A 를 간단한 형태로 만든다.

$$\text{행 교환이 없을 때} \quad \det A = \det U = U_{11} U_{22} \cdots U_{nn} = (\text{피벗들의 곱}) \quad (7)$$

이제 $\det AB = (\det A)(\det B)$ 를 증명해보자. $\det B \neq 0$ 이라 가정한다. $D(A) = \frac{\det AB}{\det B}$ 가 앞서 살펴본 성질 ①, ②, ③을 만족함을 보이려고 한다. 그러면 $D(A)$ 가 $\det A$ 와 같음을 알 수 있다. $D(A)$ 에 대해 확인되는 3가지 성질은 다음과 같다.

- ① $A = I$ 이면 $D(I) = \frac{\det B}{\det B}$ 이므로 $D(I) = 1$ 이다.
- ② 행렬 A 의 행을 교환하면 AB 의 행도 교환된다. 따라서 $D(A)$ 의 부호도 바뀐다.
- ③ 행렬 A 의 1행에 c 를 곱하면 $D(A)$ 에 c 를 곱한 것과 같다. 행렬 A 의 1행이 $v + w$ 이면 AB 의 1행은 $vB + wB$ 이다. 식 (5)는 $\det(AB)$ 를 두 행렬식으로 분해한다. 따라서 $D(A)$ 는 식 (5)를 따른다.

성질 ①, ②, ③에 따라 $D(A) = \frac{\det AB}{\det B} = \det A$ 가 성립해야 한다.

$Ax = b$ 를 푸는 크레이머 규칙

$Ax = b$ 의 해 x 의 성분 x_1 을 구하는 멋진 아이디어가 있다. 먼저 항등행렬 I 의 1열을 x 로 바꾼다. 이렇게 바꾼 삼각행렬 M_1 의 행렬식은 x_1 이다. M_1 에 행렬 A 를 곱하면 1열은 Ax 가 되고, 가정에 따라 $Ax = b$ 이다. B_1 의 나머지 열은 행렬 A 와 동일하다.

$$\begin{array}{l} \text{핵심 아이디어} \\ AM_1 = B_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} A \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = B_1 \quad (8)$$

위 식에서 한 번에 하나의 열씩 곱했다. x_1 을 구하기 위해 식 (8)의 세 행렬의 행렬식을 가져오면 식 (9)와 같다.

$$\text{곱셈 규칙} \quad (\det A)(x_1) = \det B_1 \quad \text{또는} \quad x_1 = \frac{\det B_1}{\det A} \quad (9)$$

식 (9)가 크레이머 규칙으로 구한 x 의 첫 번째 성분이다. 행렬 A 의 1행을 바꾼 것이 B_1 이었다. x_2 와 B_2 를 구하기 위해서는 다음과 같이 x 와 b 를 각각 I 와 A 의 2열에 배치하면 된다.

$$\begin{array}{l} \text{동일한 아이디어} \\ AM_2 = B_2 \end{array} \quad [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{bmatrix} = [a_1 \ b \ a_3] = B_2 \quad (10)$$

식 (10)의 양변에 행렬식을 취하면 $(\det A)(x_2) = \det B_2$ 이다. 따라서 $x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}$ 이다.

EX 1 $3x_1 + 4x_2 = 2$ 와 $5x_1 + 6x_2 = 4$ 를 풀려면 다음과 같은 세 행렬식이 필요하다.

$$2, 4 \text{를 각 } B_i \text{에 대입} \quad \det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \det B_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \det B_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

B_1, B_2 의 행렬식은 각각 $-4, 2$ 이다. 두 행렬식을 $\det A = -2$ 로 나누면 다음과 같다.

$$x = A^{-1}b \text{ 구하기} \quad x_1 = \frac{-4}{-2} = 2, \quad x_2 = \frac{2}{-2} = -1$$

위 결과를 직접 대입하면 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 임을 확인할 수 있다.

[정리] 크레이머 규칙

$\det A$ 가 0이 아니면, 다음과 같이 행렬식을 이용해 $Ax = b$ 를 풀 수 있다.

$$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det B_n}{\det A} \quad (11)$$

행렬 B_j 는 행렬 A 의 j 열이 벡터 b 로 대체된 행렬이다.

$n \times n$ 시스템(연립방정식)을 풀기 위해, 크레이머 규칙에서는 $(n+1)$ 개의 행렬식(A 와 n 개의 B_j 의 행렬식)을 계산한다. 모든 치환행렬을 포함하는 '큰 공식'³에 따라 $(n+1)$ 개의 행렬식은 각각 $n!$ 개 항의 합으로 이루어진다. 이에 따라 전체적으로는 $(n+1)!$ 개의 항이 된다. 이와 같이 방정식을 푸는 것은 터무니없다. 그러나 이로써 $Ax = b$ 의 해를 구할 수 있는 명확한 공식을 얻게 되었다.

3 (편집자) 큰 공식에 대해서는 뒤에 이어서 소개한다.

EX 2 크레이머 규칙은 숫자로 주어지는 예의 경우 비효율적이지만 문자로 주어지는 경우에는 적합하다. $n=2$ 인 경우, 다음과 같이 $AA^{-1}=A[x \ y]=I$ 를 풀어서 A^{-1} 의 두 열 x, y 를 구해보자.

$$Ax = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ay = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

행렬 A 가 두 방정식 모두에 있다. x_1, x_2, y_1, y_2 를 구하기 위해서는 다음과 같이 $|A|^4$ 와 4개의 행렬식이 필요하다.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{와} \quad \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}$$

마지막 4개의 행렬식의 값은 각각 $d, -c, -b, a$ 이다(이들은 모두 여인수이다). A^{-1} 는 다음과 같다.

$$x_1 = \frac{d}{|A|}, \quad x_2 = \frac{-c}{|A|}, \quad y_1 = \frac{-b}{|A|}, \quad y_2 = \frac{a}{|A|}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A^{-1} 는 행렬 A 의 여인수들을 포함한다. $AA^{-1}=I$ 의 계산에서와 같이, $Ax=b$ 의 우변이 항등행렬 I 의 열이면 크레이머 규칙에서 각 B_j 의 행렬식은 행렬 A 의 여인수이다.

$n=3$ 인 경우에도 이와 같은 여인수를 확인할 수 있다. 다음과 같이 $Ax=(1, 0, 0)$ 을 풀어서 A^{-1} 의 1열을 구해보자.

$$B_j \text{들의 행렬식은 } A \text{의 여인수} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

B_1 의 행렬식은 여인수 $C_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ 이다. $\det B_2 = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$ 에는 적절한 음수 부호가 있다. 이 여인수 C_{12} 는 A^{-1} 의 1열의 성분이다. 다음과 같이 $\det A$ 로 나누면 A^{-1} 를 구할 수 있다.

$$A^{-1} \text{의 공식} \quad (A^{-1})_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det A}, \quad A^{-1} = \frac{C^T}{\det A} \quad (12)$$

4 (편집자) 행렬 A 의 행렬식 $\det A$ 는 $|A|$ 로 표기하기도 한다.

행렬식에 대한 큰 공식 : $n!$ 개의 항

지금까지 $\det A$ 에 대한 두 공식을 소개했다. 첫 번째는 여인수 공식으로, $\det A$ 를 더 작은 행렬식들의 결합으로 표현했다(이 공식은 행렬 A 에 0이 아닌 대각선이 오직 3개 있고(삼중대각행렬), 나머지 대부분의 성분이 0일 때 쉽게 행렬식을 구하는 방법이었다). 두 번째는 소거와 $PA = LU$ 를 이용한 피벗 공식이었다. 2장에서 살펴봤듯이, L 과 U 는 삼각행렬이므로 쉽게 행렬식을 구할 수 있다. 그리고 $\det P = \pm 1$ 이다. 행렬식에 대한 큰 공식은 $\det A$ 에 대한 식 안에 $n!$ 개의 항이 포함되므로 사용하기 쉽지 않다.

모든 $n \times n$ 치환행렬 P ($n!$ 개의 P 가 존재)는 행렬식의 큰 공식에서 D_P 라는 항을 하나씩 만든다. 각 치환행렬 P 는 n 개의 1을 성분으로 갖는다. 각 행과 열에는 하나의 1만 존재한다. 치환행렬 P 의 1이 있는 위치에 해당하는 행렬 A 의 위치에 있는 n 개의 수들의 곱 $a_{1\alpha}a_{2\beta} \cdots a_{n\omega}$ 로 전체 행렬식 $\det A$ 에 대한 기여도 D_P 를 구한다. 그리고 D_P 안에 $\det P = \pm 1$ 을 인수로 포함해야 함을 꼭 기억해야 한다. $+1$ 과 -1 중 무엇인지는 P 가 짝수 치환행렬인지, 홀수 치환행렬인지에 따라 결정된다. 이제 $D_P = ad$ 또는 aqz 와 같은 항들을 더하면 된다.

$$\begin{aligned} \text{큰 공식} \quad \det A &= (\text{모든 } D_P \text{의 합}) \\ &= (n! \text{개의 치환행렬 } P \text{로부터 얻는 } n! \text{개의 항의 합}) \end{aligned} \quad (13)$$

$n = 2$ 일 때 식 (13)은 $ad - bc$ 이다(이 경우 두 치환행렬로부터 $D_P = ad, -bc$ 이다). $n = 3$ 일 때 식 (13)에 $3! = 6$ 개의 치환과 6개의 항이 있다. 따라서 다음과 같다.

$$\det A = +aqz + brx + cpy - ary - bpz - cqx$$

5.2 연습문제

1. $\det A = 2$ 일 때 $\det A^{-1}$, $\det A^n$, $\det A^T$ 를 구하라.
2. 다음 행렬 A, B, C, D 의 행렬식을 구하라. 이 행렬들의 열들은 선형독립인가?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

3. 다음 행렬 A 에서 x 로 표기한 5개의 수와 상관없이 $\det A = 0$ 임을 보여라.

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

1행에 대한 여인수는 무엇인가? 행렬 A 의 랭크는 무엇인가? $\det A$ 의 6개 항은 무엇인가?

4. 다음 물음에 답하라.

(a) $D_n = \det(A^n)$ 일 때, 모든 A_{ij} 에 대해 $|A_{ij}| < 1$ 이면 D_n 은 무한대로 발산하는가?

(b) 모든 A_{ij} 에 대해 $|A_{ij}| > 1$ 일 때, D_n 은 0으로 수렴하는가?

※ [문제 5~9]는 $x = A^{-1}b$ 에 대한 크레이머 규칙에 관한 문제이다.

5. 크레이머 규칙 $x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$ 를 이용해 다음 방정식의 해를 구하라.

(a) $2x_1 + 5x_2 = 1$
 $x_1 + 4x_2 = 2$

(b) $2x_1 + x_2 = 1$
 $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
 $x_2 + 2x_3 = 0$

6. 크레이머 규칙을 이용해 다음 방정식에서 y 만 구하라.

(a) $ax + by = 1$
 $cx + dy = 0$

(b) $ax + by + cz = 1$
 $dx + ey + fz = 0$
 $gx + hy + iz = 0$

7. $\det A = 0$ 인 경우에는 크레이머 규칙을 사용할 수 없다. 다음 보기 중 (a)는 방정식의 해가 존재하지 않고, (b)는 방정식의 해가 무수히 많다. 각 경우에 대해 $x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$ 는 무엇인가?

(a) $2x_1 + 3x_2 = 1$ (평행한 직선)
 $4x_1 + 6x_2 = 1$

(b) $2x_1 + 3x_2 = 1$ (동일한 직선)
 $4x_1 + 6x_2 = 2$

8. (크레이머 규칙의 빠른 증명) 행렬식은 1열에 대한 선형함수이다. 행렬의 두 열이 동일하면 행렬식은 0이다. $b = Ax = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ 가 행렬 A 의 1열이 되면, 다음과 같이 행렬 B_1 과 크레이머 규칙 $x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}$ 를 얻는다.

$$|b \ a_2 \ a_3| = |x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 \ a_2 \ a_3| = x_1|a_1 \ a_2 \ a_3| = x_1 \det A$$

어떤 단계에서 위 식의 중간 식 $x_1|a_1 \ a_2 \ a_3|$ 가 유도되는가?

9. 우변 벡터 b 가 행렬 A 의 1열과 동일할 때, 3×3 연립방정식 $Ax = b$ 의 해를 구하라. 크레이머 규칙에서 어떻게 각 행렬식이 해 x 를 유도하는가?

10. 3개의 대각선이 1, 1, 1로 이루어진 $n \times n$ 삼중대각행렬의 행렬식을 E_n 이라 하자. 1행에 대한 여인수를 이용해 $E_n = E_{n-1} - E_{n-2}$ 임을 보여라. 그리고 $E_1 = 1, E_2 = 0$ 으로 시작하여 $E_3, E_4, \dots, E_8$ 을 구하라. E_i 들이 어떤 규칙으로 반복되는지 관찰하고 E_{100} 을 구하라.

$$E_1 = |1|, \quad E_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad E_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad E_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

11. 3×3 행렬의 성분이 1, 2, 3, 4, ..., 9일 때, 이 행렬의 최대 행렬식 값은 무엇인가? 이 문제의 계산이 조금 복잡하므로 컴퓨터를 이용한 계산을 권장한다.

12. 다음 명제의 참 또는 거짓을 판별하라.

‘ ABC 의 행렬식은 $(\det A)(\det B)(\det C)$ 이다.’

13. 다음 행렬 A 를 U 로 소거한 뒤, 피벗의 곱을 이용해 $\det A$ 를 구하라.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

14. 소거를 적용하여 상삼각행렬 U 를 만들고, 다음 행렬식을 구하라.

(a) $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

15. 행 연산을 이용해 다음 행렬식을 구하라.

(a) $\det \begin{bmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{bmatrix}$

(b) $\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$: 방데르몽드 행렬식(Vandermonde determinant)

16. 4×4 행렬식에서 다음과 같은 큰 공식에서의 항에 대해 $\det P$ 가 +1인지 -1인지를 결정하라.

$$\pm a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}, \quad \pm a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}, \quad \pm a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

17. 다음 물음에 답하라.

(a) $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ 이면, $\det A$ 에서 6개의 항들 중 몇 개가 0인가?

(b) $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$ 이면, 24개의 항 $a_{1j}a_{2k}a_{3l}a_{4m}$ 들 중 몇 개가 0인가?

18. 행렬식에 대한 큰 공식은 $n!$ 개의 항을 포함한다. 행렬 A 의 하나의 성분이 0이면 $(n-1)!$ 개의 항들이 0이 된다. 만약 행렬 A 가 0이 아닌 대각선을 오직 3개만 갖는 삼중대각행렬이라면 몇 개의 항이 남는가? $n = 1, 2, 3, 4$ 인 경우, $n \times n$ 삼중대각행렬 A 의 행렬식은 각각 1, 2, 3, 5개의 0이 아닌 항을 갖는다. 여기서 1, 2, 3, 5는 피보나치 수이다. 이제 5×5 삼중대각행렬의 행렬식이 왜 $5 + 3 = 8$ 개의 0이 아닌 항을 갖는지 보여라. 이때 a_{11} 과 a_{12} 의 여인수를 이용하라.

19. 4×4 행렬 A 의 행렬식에 대한 큰 공식에는 24개의 항이 있다. a_{13} 과 a_{22} 를 동시에 포함하는 항은 몇 개인가? $\det A$ 에서 24개의 항을 모두 작성하는 것은 쉽지 않다.

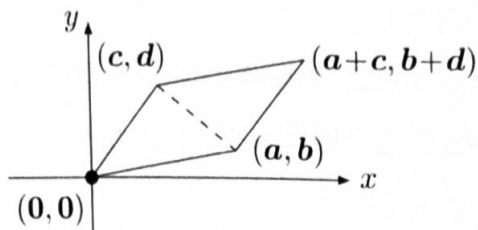
5.3 행렬식을 이용한 넓이와 부피 계산

1. $(0, 0)$ 에서 시작하는 변 $e_1 = (a, b)$, $e_2 = (c, d)$ 를 갖는 2차원 평행사변형
2. (평행사변형의 넓이) = |(행렬 $E = [e_1 \ e_2]$ 의 행렬식)| $ad - bc$
3. $(0, 0, 0)$ 에서 시작하는 세 에지($e=dge$) e_1 , e_2 , e_3 를 갖는 3차원 평행육면체(기울어진 상자)
4. (평행육면체의 부피) = |(3×3 에지행렬 E 의 행렬식)|

행렬식은 넓이와 부피를 구하는 훌륭한 공식을 제공한다. 이때 영역의 변은 직선이어야 하지만, 이 영역이 정사각형일 필요는 없다. 대표적인 영역은 평행사변형 또는 평행사변형의 반쪽인 삼각형이다. 문제는 **넓이를 구하는 것**이다. 삼각형의 경우 넓이가 $\frac{1}{2}bh$ (밑변과 높이의 곱의 절반)이다. 평행사변형은 동일한 형태의 삼각형이 2개 있는 것이므로 식에서 $\frac{1}{2}$ 을 없앤다. 그러면 (평행사변형의 넓이)=(밑변)×(높이)이다.

이 공식은 기억하기도 쉽다. 그러나 보통 문제에서는 밑변과 높이가 주어지지 않는다. 오직 꼭짓점의 위치만 알고 있다. 예를 들어 삼각형의 꼭짓점 위치가 $(0, 0)$, (a, b) , (c, d) 라 가정하자. 그러면 이 꼭짓점으로 형성되는 평행사변형의 네 번째 꼭짓점은 $(a+c, b+d)$ 이다. a, b, c, d 를 알 때 넓이는 무엇인가?

삼각형과
평행사변형



밑변을 가장 아래쪽 변이라고 하면 그 길이는 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 이다. 높이를 구하기 위해서는 꼭짓점 (c, d) 에서 밑변으로 수직인 선을 내릴 수 있다. 높이 h 는 루트를 포함한 복잡한 식이 될 것이다. 그러나 넓이는 루트를 포함하지 않는다. $a = d = 1, b = c = 0$ (정사각형)일 때, 넓이 공식은 $ad - bc$ 로 아주 간단하게 유도된다.

$$(\text{평행사변형의 넓이}) = |(\text{행렬의 행렬식})| = \pm \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = |ad - bc| \quad (1)$$

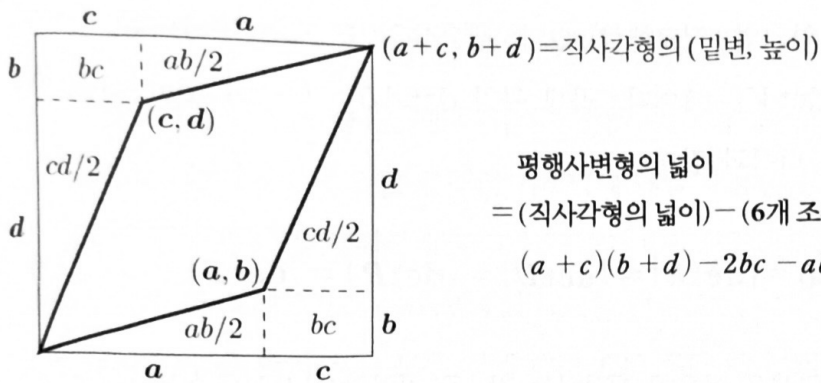
목표는 선형대수학을 이용해 이 공식을 유도하는 것이다(공식에 루트와 음수가 생기지 않도록 한다). $|ad - bc|$ 와 같이 절댓값 기호를 사용하므로 넓이는 음수가 되지 않는다.

이제 좀 더 복잡한 3차원, 궁극적으로는 n 차원으로 확장하고자 한다. 우선 평행육면체의 4개 에지의 좌표를 $(0, 0, 0), (a, b, c), (p, q, r), (x, y, z)$ 라 하자(평행육면체는 기울어져 있으므로 6개의 면은 모두 평행사변형이다).

넓이 공식 (1)을 이용해 부피 공식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$(\text{평행육면체의 부피}) = |(\text{행렬의 행렬식})| = \pm \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} \quad (2)$$

처음에는 평면에서 시작하여 기하학을 활용한다. [그림 5.1]은 평행사변형에 6개의 조각을 붙여서 직사각형을 만드는 과정을 보여준다. 직사각형의 넓이에서 6개 조각의 넓이를 빼면 평행사변형의 넓이 $ad - bc$ 가 된다(루트는 없다). [그림 5.1]이 그다지 정교하지는 않지만 2차원에서는 유용한 그림이므로 참고하면 도움이 될 것이다.



[그림 5.1] 평행사변형에 6개의 조각을 더하면 직사각형이 된다.

이와 같은 결과가 3차원에서도 성립할까? [그림 5.1]을 보면 조각들을 더해서 평행육면체를 직육면체로 만들 수 있을 것 같기도 하지만, 더 좋은 방법은 선형대수학을 이용하는 것이다.

선형대수학에서의 넓이와 부피

대수학을 사용할수록 기하학을 덜 사용하게 된다. 선형대수학에서는 행렬의 분해를 주로 다룬다. 여기서 하나의 아이디어를 생각해보자.

n 차원에서 평행육면체는 원점에서 시작하는 n 개의 에지 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 을 갖는다. 2차원에서 평행사변형은 두 벡터 $e_1 = (a, b)$, $e_2 = (c, d)$ 를 에지로 갖는다. 벡터 e_i 들은 '평행육면체'의 n 개 또는 2개의 꼭짓점을 만든다. e_1, e_2 로 만들어지는 2차원 그림에서 평행사변형의 네 번째 좌표는 $e_1 + e_2$ 이다. 또한 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 으로 만들어지는 n 차원 그림에서 평행육면체의 다른 꼭짓점들은 e_i 들의 합으로 주어진다. 평행육면체는 다음과 같이 행렬 E 의 n 개의 에지에 의해 완전히 결정된다.

$$\text{에지행렬} \quad E_2 = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad E_n = \begin{bmatrix} | & & | \\ e_1 & \cdots & e_n \\ | & & | \end{bmatrix} \quad (\text{열}) = (\text{평행육면체의 에지})$$

목표는 평행육면체의 부피가 $|\det E|$ 임을 증명하는 것이다. 이 목표에 도달하기 위해 행렬 E 의 3가지 분해를 생각한다. 다음과 같은 3가지 분해는 각각 2장, 4장, 7장에서 다루는 내용이다. 7장에서 다룰 세 번째 분해는 E 의 특잇값 분해(SVD)이다.

$$LU \text{ 분해} : (\text{하삼각행렬 } L) \times (\text{상삼각행렬 } U) \quad E = LU$$

$$QR \text{ 분해} : (\text{직교행렬 } Q) \times (\text{삼각행렬 } R) \quad E = QR$$

$$\text{특잇값 분해} : (\text{직교행렬 } U) \times (\text{대각행렬 } \Sigma) \times (\text{직교행렬 } V^T) \quad E = U \Sigma V^T$$

E 가 $(n \times n)$ 정사각행렬이므로 분해된 각 행렬도 정사각행렬이다. L 의 주대각성분은 모두 1이

므로 L 의 행렬식은 1이다. 임의의 직교행렬 Q 의 행렬식은 1 또는 -1 이다. 그러면 $\det L = |\det Q| = |\det U| = |\det V| = 1$ 이다. 곱셈 규칙 $\det AB = (\det A)(\det B)$ 를 이용하면 각 분해에 대해 $|\det E|$ 는 다음과 같다.

$$(\text{평행육면체의 부피}) = |\det E| = |\det U| = |\det R| = |\det \Sigma| \quad (3)$$

문제는 평행육면체의 부피를 행렬식을 이용해 계산하는 것, 즉 기하학을 선형대수학으로 연결하는 것이다. 먼저 직교행렬 Q 의 기하학으로 시작해보자.

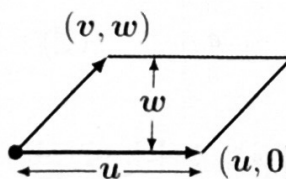
$\mathbb{R}^n$ 에서의 임의의 영역에 대한 핵심 아이디어는 직교행렬 Q 를 영역의 각 점에 곱해도 해당 영역의 부피가 변하지 않는다는 것이다. 이 사실을 먼저 이해하고 $E = QR$ 을 사용한다.

- 임의의 행렬 곱하기 : 직선은 직선으로 유지되고, 넓이는 변할 수 있다.
- 직교행렬 Q 곱하기 : $x^T x$, $x^T y$ 는 각각 $(Qx)^T (Qx)$, $(Qx)^T (Qy)$ 와 같다.

직교행렬 Q 에 의한 회전으로 길이, 각도, 모양, 부피는 변하지 않는다.

이 사실은 곡면 영역에도 그대로 적용된다. 이 영역은 작은 정육면체들과 얇은 곡면 조각들로 나눌 수 있다. 작은 곡면 조각들의 부피는 0에 가까워질 수 있다. 작은 정육면체들의 부피는 직교행렬 Q 에 의해 변하지 않는다. 따라서 R 에 의해 변환된 도형과 $E = QR$ 에 의해 변환된 도형의 부피는 동일하다.

R 은 삼각행렬이다. 행렬 R 이 만드는 평행육면체의 부피는 계산할 수 있다. xy -평면의 평행사변형에서 밑변과 높이는 $E = QR$ 에 있는 행렬 R 의 주대각성분 u 와 w 이다.

$$R = \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & w \end{bmatrix}$$


$$(\text{밑변}) = u, (\text{높이}) = w$$

$$|(\text{넓이})| = |u \times w| = |\det R|$$

요점은 R 의 주대각성분이 새로운 차원에서의 높이를 보여준다는 것이다. R 의 주대각성분들을 곱하면 평행육면체의 부피를 구할 수 있고, 이 값이 바로 삼각행렬 R 의 행렬식이다. $|\det Q| = 1$ 이고 $|\det E| = |\det R|$ 이므로 부피 공식 $|\det E|$ 는 증명된다.

마지막으로 하나 덧붙이면, 특잇값 분해(SVD) $E = U\Sigma V^T$ 에는 두 직교행렬 U 와 V 가 있다. 따라서 $|\det E|$ 는 $|\det \Sigma|$ 와 같다. 여기서 Σ 는 대각행렬이다. Σ 는 $\mathbb{R}^n$ 에서 완전한 직육면체를 만든다. 이렇게 보면 앞서 평행육면체를 만드는 삼각행렬 R 을 사용한 QR 분해보다 $U\Sigma V^T$ 에

의한 특잇값 분해의 접근법이 더 간단해 보인다.

그러나 기울어진 도형(평행육면체)은 주대각성분 u, v 의 기하적 의미를 잘 보여준다는 장점이 있다(밑변 u , 높이 w). 특잇값 분해의 기하학에 대한 내용은 7장에서 자세히 다룬다. 특잇값은 n 차원 타원에 대해 매우 명확하게 드러나지만, 직육면체에 대해서는 그다지 명확하지 않다. $\mathcal{E}$ 는 타원축의 길이를 알려주지만, 직육면체의 에지를 알려주지는 않는다. $E = QR$ 은 (직육면체의 부피) = $|\det R|$ 임을 알려준다. 모든 점에 행렬 E 를 곱할 때 부피가 증가하는 비율은 $\det E$ 이다.

5.3 연습문제

1. 네 점 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 을 꼭짓점으로 갖는 3차원 정육면체에 대해 에지행렬 E 를 구하라. $(0, 0, 0)$ 에서 시작하는 3개의 에지벡터 e_1, e_2, e_3 를 갖는 상자의 꼭짓점 8개는 무엇인가?
2. 3차원에서 에지벡터 e_1, e_2, e_3 가 정규직교벡터라 하자. 이 경우에 해당하는 상자에 대해 설명하고 그 부피를 구하라.
3. 에지벡터의 크기가 $\|e_1\| = 1$, $\|e_2\| = 2$, $\|e_3\| = 3$ 일 때, 상자의 최대 부피를 구하라. 그리고 최대 부피에 해당하는 상자에 대해 설명하라.
4. $n \times n$ 행렬 E 의 열이 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 이라 할 때, 다음 부등식을 증명하라. [문제 3]의 부피에 대해서도 다음 부등식이 성립한다.

$$|\det E| \leq (\text{열벡터의 크기의 곱}) = \|e_1\| \|e_2\| \cdots \|e_n\|$$

힌트 $E = QR$ 에서 삼각행렬 R 의 주대각성분 R_{ii} 가 $R_{ii} \leq \|e_i\|$ 를 만족하는 이유를 생각한다.

5. 다음 물음에 답하라.
 - (a) 두 변이 $v = (3, 2)$, $w = (1, 4)$ 인 평행사변형의 넓이를 구하라.
 - (b) 세 변이 $v, w, v + w$ 인 삼각형의 넓이를 구하고, 이 삼각형을 그려라.
 - (c) 세 변이 $v, w, w - v$ 인 삼각형의 넓이를 구하고, 이 삼각형을 그려라.
6. 다음 물음에 답하라.
 - (a) 삼각형의 세 꼭짓점 좌표가 $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(0, 5)$ 일 때, 이 삼각형의 넓이를 구하라.
 - (b) (a)의 삼각형에 꼭짓점 $(-1, 0)$ 을 추가하여 만든 사각형의 넓이를 구하라.

7. 아다마르 행렬 H 는 직교하는 행을 갖는다. 상자가 초입방체(hypercube)일 때, 다음을 계산하라.

$$|\det H| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\mathbb{R}^4 \text{에서 변의 길이가 2인 초입방체의 부피})$$

8. n 차원 정육면체의 꼭짓점은 몇 개인가? 에지는 몇 개인가? $(n-1)$ 차원의 면은 몇 개인가? 에지가 $2l$ 의 행인 $\mathbb{R}^n$ 상의 정육면체의 부피를 구하라. 초입방체 컴퓨터는 에지를 따라 연결된 꼭짓점마다 병렬 프로세서(parallel processor)를 갖는다.
9. 세 꼭짓점이 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ 인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}$ 이다. 네 꼭짓점이 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 인 $\mathbb{R}^3$ 상의 각뿔(pyramid)의 부피를 구하라. 또 5개의 꼭짓점이 $(0, 0, 0, 0)$ 과 l 의 4개의 열인 $\mathbb{R}^4$ 상의 각뿔의 부피를 구하라.
10. 에지행렬 E 가 직교행렬이면 상자의 부피는 얼마인가? 에지행렬 E 가 특이행렬이면 상자의 부피는 얼마인가? $\mathbb{R}^n$ 상에서 E 에 해당하는 상자의 부피가 V 일 때, $2E$ 에 해당하는 상자의 부피는 얼마인가?
11. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 와 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 에 해당하는 평행사변형을 그려라. 두 행렬에 대한 영역의 넓이가 동일한 이유는 무엇인가?
12. 에지행렬 $\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & w \end{bmatrix}$ 를 전치하면 동일한 행렬식을 갖는 행렬과 동일한 넓이의 평행사변형을 얻는다. 이 평행사변형을 그린 뒤 넓이를 다시 계산하라.
13. $(0, 0)$ 에서 시작하여 (a, b) , (c, d) 로 가는 변을 갖는 평행사변형 P 를 그려라. 이 평행사변형의 넓이는 다음과 같다.

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

변의 길이가 a , d 인 직사각형과 변의 길이가 b , c 인 직사각형으로부터 평행사변형 P 를 어떻게 만들 수 있는가?

14. 5×5 행렬 A 는 5개의 1과 20개의 2를 성분으로 갖는다. 이 행렬의 최대 행렬식 값을 구하라.
15. 2×2 행렬 E 의 열벡터의 크기는 각각 $\|e_1\|$, $\|e_2\|$ 이다. $|\det E| \leq \|e_1\| \|e_2\|$ 임을 보여라. 이 식은 2×2 행렬인 경우의 **아다마르 부등식**(Hadamard's inequality)이다. 이 부등식은 [문제 4]를 푸는 핵심 아이디어이다. 다시 말해 (평행사변형의 넓이) $\leq |(\text{변1})| |(\text{변2})|$ 이다.